

# Klassische Theoretische Physik I

## Blatt 5

SS 2015

### 18. Schwingungsdauer

Skript WS2000/01, S.28.

### 19. Drehimpuls der Relativbewegung

a) Mit  $M = m_1 + m_2$  gilt

$$\gamma_1 = \Gamma + \frac{m_2 q}{M}, \quad \gamma_2 = \Gamma - \frac{m_1 q}{M}.$$

Für den Drehimpuls des  $i$ . Massenpunkts finden wir

$$\begin{aligned} L_i &= p_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p_i) \\ &= \langle m_i \dot{\gamma}_i, \cdot \rangle \otimes (\gamma_i - \Gamma) - \langle \gamma_i - \Gamma, \cdot \rangle \otimes m_i \dot{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Mit der reduzierten Masse  $m = \frac{m_1 m_2}{M}$  und  $p = \mathcal{I}(m \dot{q})$  ergibt sich dann durch einsetzen

$$L = L_1 + L_2 = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p).$$

b) Mit der Produktregel ergibt sich

$$\frac{d}{dt} L = \mathcal{I}(m \ddot{q}) \otimes q + \underbrace{\mathcal{I}(m \dot{q}) \otimes \dot{q} - \mathcal{I}(\dot{q}) \otimes (m \dot{q})}_{=0} - \mathcal{I}(q) \otimes m \ddot{q}.$$

Die mittleren Terme heben sich auf, da das Tensorprodukt „durchsichtig“ für Skalare ist, die restlichen beiden sind bis auf das Vorzeichen gleich, da es sich um eine Zentralkraft handelt.

### 20. Zur Bewegungsebene

a) Aus der Vorlesung über mathematische Methoden ist Ihnen bekannt, dass ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  ein Skalarprodukt auf  $V^*$  induziert gemäß

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{V^*} = \langle \mathcal{I}^{-1}(\varphi), \mathcal{I}^{-1}(\psi) \rangle_V.$$

Daher ist die Bedingung  $v \perp q \wedge v \perp \mathcal{I}^{-1}(p)$  äquivalent zu  $\mathcal{I}(v) \perp \mathcal{I}(q) \wedge \mathcal{I}(v) \perp p$ .  $\mathcal{I}(v)$  liegt im Kern von  $L$ , denn

$$\begin{aligned} L(\mathcal{I}(v)) &= p \otimes \mathcal{I}(v)(q) - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}(v)(\mathcal{I}^{-1}(p)) \\ &= \langle v, q \rangle_V p - \langle v, \mathcal{I}^{-1}(p) \rangle_V \mathcal{I}(q) = 0. \end{aligned}$$

Nun gilt aber per Definition  $\text{Ker}(L) = A$  sowie  $A = (A^\perp)^\perp$ , daher ist  $\mathcal{I}(v) \perp A^\perp$  und  $v \perp \mathcal{I}^{-1}(A^\perp)$ .

- b) Wir zeigen die Eigenschaft  $Lf_1(t) = |L|f_2(t)$ , die andere folgt analog. Das induzierte Skalarprodukt auf  $V^*$  (siehe a) definiert eine Norm, bzgl. der  $\mathcal{I}\left(\frac{q}{\|q\|}\right)$  normiert ist. Daher gilt  $p_{\parallel} = \|p_{\parallel}\| \mathcal{I}\left(\frac{q}{\|q\|}\right)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} Lf_1 &= p \otimes \left\langle q, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle - \mathcal{I}(q) \otimes \left\langle \mathcal{I}^{-1}(p), \frac{q}{\|q\|} \right\rangle \\ &= \|q\|p - \|p_{\parallel}\|\mathcal{I}(q) \\ &= \|q\|p_{\perp} + \|q\|p_{\parallel} - \|p_{\parallel}\|\mathcal{I}(q) \\ &= |L|f_2. \end{aligned}$$

## 21. Flächensatz

Der folgende Beweis orientiert sich an Beispiel 4.A.11 aus Band III des Lehrbuchs der Mathematik von Storch/Wiebe.

Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{E}^2$  eine stetig differenzierbare Kurve.  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$  sei eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b] \subset I$ , ferner sei  $\Omega$  eine Volumenform<sup>1</sup>. Die Fläche  $F(\Delta_i)$  eines Dreiecks  $\Delta_i$  mit Eckpunkten  $O$ ,  $f(t_i)$  und  $f(t_{i+1})$  ist

$$F(\Delta_i) = \frac{1}{2}\Omega(f(t_i) - O, f(t_{i+1}) - O) = \frac{1}{2}\Omega(f(t_i) - O, f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

Eine Approximation der vom Vektor  $f(t) - O$  für  $t \in [a, b]$  überstrichenen Fläche ist somit durch  $\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(f(t_j) - O, f(t_{j+1}) - f(t_j))$  gegeben und es ist zu vermuten, dass dieser Ausdruck für jede Folge von Unterteilungen, für die die maximale Länge der Teilintervalle gegen Null konvergieren, gegen ein Integral konvergiert,

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(f(t_j) - O, f(t_{j+1}) - f(t_j)) \rightarrow F_a^b(f) := \frac{1}{2} \int_a^b \Omega(f(t), f'(t)) dt.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m-1} \Omega(f(t_j) - O, f(t_{j+1}) - f(t_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(f(t_j) - O, f'(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \sum_{j=0}^{m-1} \Omega(f(t_j) - O, f(t_{j+1}) - f(t_j) - f'(t_j)(t_{j+1} - t_j)). \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz liefert für stetig differenzierbares  $f$  die Abschätzung

$$\|f(t_{j+1}) - f(t_j) - f'(t_j)(t_{j+1} - t_j)\| \leq \|f'(\tau_j) - f'(t_j)\|(t_{j+1} - t_j)$$

für ein  $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$ .  $f'$  ist auf  $[a, b]$  gleichmäßig stetig, der zweite Summand konvergiert daher gegen Null. Der erste Summand ist eine Riemann-Summe für die stetige (und damit R-integrierbare) Funktion  $\Omega(f(t), f'(t))$  und konvergiert daher gegen das Integral.

Damit ist es gerechtfertigt, den Integranden

$$c_f(t) := \frac{1}{2}\Omega(f(t), f'(t))$$

---

<sup>1</sup>Z.B. die Determinante.

als Flächengeschwindigkeit zu bezeichnen. Ist  $f$  zweimal differenzierbar, so gilt nach der Produktregel

$$c'_f(t) = \frac{1}{2}\Omega(f'(t), f'(t)) + \frac{1}{2}\Omega(f(t) - O, f''(t)) .$$

Der erste Summand verschwindet, da  $\Omega$  alterniert. Anhand des zweiten Summanden sieht man, dass die Flächengeschwindigkeit konstant ist, wenn der Fahrstrahl  $f(t) - O$  und die Beschleunigung  $f''(t)$  parallel sind. Das zweite Kepler'sche Gesetz gilt also für alle Zentralkräfte.

