Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt Musterlösung Blatt 12

SS 2015

53. Symmetrische Ladungsverteilungen

a) Siehe Skript SS1998, S. 102f.

b) Wie a). Man erhält $f(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r \chi(r')r'dr'$.

c) Zur Berechnung von $f(r)$ ist in beiden Fällen zu unterscheiden, ob man sich innerhalb oder außerhalb des Objekts befindet.
Für die Kugel erhält man

$$f(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} & \text{falls } r < R; \\ \frac{1}{r^2} & \text{falls } r \geq R. \end{cases}$$

Das Potential ergibt sich durch Integration. Dabei fordern wir $\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0$ und bestimmen die erste Integrationskonstante durch die Forderung, dass $\Phi(r)$ in $r = R$ stetig ist:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right) & \text{falls } r < R; \\ \frac{1}{r} & \text{falls } r \geq R. \end{cases}$$

Für den Zylinder ergibt sich für die Wahl $\Phi(R) = 0$

$$f(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \begin{cases} \frac{r}{R^2} & \text{falls } r < R; \\ \frac{1}{r} & \text{falls } r \geq R \end{cases}$$

und

$$\Phi(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \begin{cases} \frac{1}{2R^2}(R^2 - r^2) & \text{falls } r < R; \\ -\ln\left(\frac{r}{R}\right) & \text{falls } r \geq R \end{cases}$$

54. Metallische Kugel im homogenen Feld

a) Einsetzen ergibt die beiden Differentialgleichungen

$$\partial_r(r^2\partial_r f) = 0\ , \quad \partial_r(r^2\partial_r g) - 2g = 0\ .$$

Die erste löst man sofort durch Integration und erhält $f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$. Für die zweite liefert der Ansatz $g(r) = r^\alpha$ die Gleichung $(\alpha(\alpha+1) - 2)r^\alpha = 0$, also die allgemeine Lösung $g(r) = \frac{c_3}{r^2} + c_4 r$.

b) Asymptotisch sollte die Form des Feldes und des Potentials nicht beeinflusst werden. Da zu $E = E_0 dz$ das Potential $\Phi = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$ gehört, folgt $c_4 = -E_0$.

c) Auf der Oberfläche hat das Potential den Wert $\Phi(R,\theta) = \frac{c_1}{R} + \left(\frac{c_3}{R^2} - E_0 R^2\right)\cos\theta + c_2$. Dieser ist nur dann unabhängig von θ, wenn die Klammer verschwindet, d.h. $c_3 = E_0 R^3$.

d) Wir bezeichnen die Kugel mit Radius R' um den Ursprung mit $B^3_{R'}$, ihre Oberfläche mit $S^2_{R'}$. Dann gilt $Q = \int_{B^3_{R'}} \rho = \int_{B^3_{R'}} dD = \int_{S^2_{R'}} D$. D lässt sich aus dem Potential berechnen gemäß $D = \epsilon_0 * E = -\epsilon * d\Phi$. Da über eine Sphäre integriert wird, spielt in $*d\Phi$ nur der Koeffizient der Raumwinkelform τ eine Rolle, denn Integrale von $dr \wedge d\phi$ bzw. $dr \wedge d\theta$ über eine Sphäre verschwinden (erinnern Sie sich ans Wintersemester: die aus der Parametrisierung berechneten Tangentialvektoren haben keine Komponente in Richtung ∂_r). Daher

$$\begin{aligned} - * d\Phi &= - * \left(-\frac{c_1}{r^2} dr + \left(-\frac{2c_3}{r^3} + c_4 \right) \cos\theta dr + \dots \right) \\ &= \left(c_1 + \left(-\frac{2c_3}{r} + c_4 r \right) \cos\theta \right) \tau + \dots \ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{S^2_{R'}} D &= \epsilon_0 c_1 \int_{S^2_{R'}} \tau + \epsilon_0 \left(-\frac{2c_3}{R'} + c_4 R' \right) \int_{S^2_{R'}} \cos\theta \tau \\ &= 4\pi\epsilon_0 c_1 \ . \end{aligned}$$

Wir erhalten also $c_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$.

55. Laplacegleichung mit Azimuthalsymmetrie

a) Einsetzen von $\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ergibt $\partial_r(r^2\partial_r R(r)) = l(l+1)R(r)$ und $\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\Theta(\theta)) = -l(l+1)\sin\theta\Theta(\theta)$.

b) Einsetzen von $R(r) = r^\alpha$ ergibt $\alpha(\alpha+1)r^\alpha = l(l+1)r^\alpha$. Dies ist für alle r erfüllt, wenn $\alpha = l$ oder $\alpha = -(l+1)$ ist.

c) Damit unabhängig von θ gilt $\Phi(R,\theta) = 0$ muss $B_l = -A_l R^{2l+1}$ sein.

d) $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

e) Die Lösung muss die korrekte Asymptotik liefern, d.h. für $r \to \infty$ muss

$$\Phi \to -E_0 r\cos\theta + c_2 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + c_2 P_0(\cos\theta)$$

gelten. Das Gleichheitszeichen folgt durch Vergleich mit d). Da die Legendre-Polynome ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, ist die Reihe tatsächlich eine Summe und nur $l \leq 1$ trägt bei. Auf diese Weise werden die Ergebnisse von Aufgabe 54 reproduziert.