Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt Musterlösung Aufgabe 31

SS 2015

Dass Aufgabe 31 mit Hilfe des Satzes von Steiner sehr einfach gelöst werden konnte, scheint kaum jemandem aufgefallen zu sein – die knappe Formulierung der Aufgabe war daran wohl nicht ganz unschuldig. Man erspart dadurch viele Integrale und erhält sofort die neuen Hauptträgheitsmomente.

Aus Aufgabe 30a ergibt sich, dass die Hauptträgheitsmomente eines Würfels der Kantenlänge b bzgl. seines Schwerpunkts Γ und bzgl. einer Orthonormalbasis von Generatoren von Drehungen um Achsen, die parallel zu den Kanten der Würfels sind, alle $\frac{m}{6}b^2$ sind.

Die Raumdiagonalen des Würfels bilden ebenfalls ein Hauptachsensystem. Dies sieht man z.B. mit Aufgabe 29 ein, denn die Spiegelung an der zu einer Raumdiagonalen orthogonalen Ebene durch den Schwerpunkt ist eine Symmetrie des Würfels. Die Summe der Hauptträgheitsmomente ändert sich durch eine orthogonale Transformation nicht, d.h. auch bzgl. Drehungen um die Raumdiagonalen sind die Hauptträgheitsmomente bzgl. des Schwerpunkts $\frac{m}{6}b^2$.

Betrachten wir einen festen Eckpunkt α, so können wir $a = \alpha - \Gamma = \frac{b}{2}\sqrt{3}\tilde{e}_3$ schreiben. Die Projektion von a auf die zu a senkrechte Ebene verschwindet natürlich, sodass das Trägheitsmoment bzgl. der durch a definierten Achsen weiterhin $\frac{m}{6}b^2$ ist, vgl. (2.60). Für Achsen J durch α senkrecht zu a gilt $|a_\perp| = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ und damit $I_J^{(\alpha)} = I_J^{(\Gamma)} + M|a_\perp|^2 = \frac{m}{6}b^2 + \frac{3}{4}mb^2 = \frac{11}{12}mb^2$.