1) a) Kräftefreie Bewegung ist geradlinig-gleichförmig

$$m_i \langle \ddot{\gamma}_i(t), - \rangle = F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_N; \dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_N; t)(-)$$ (3)

Übt A eine Kraft auf B aus (actio), so wirkt eine gleich große, entgegen gerichtete Kraft von B auf A.

b) $V = \frac{|L|^2}{2mr^2} + \phi(r)$ (1)

c) $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr_p}{r_p^2}$ $\quad D = \frac{q}{4\pi} \tau_p$ (2)

d) $O(V) = \{ R \in End(V) \mid \langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle \ \forall v, v' \in V \}$

$so(V) = \{ A \in End(V) \mid A = -A^t \}$ (4)

$I^{(\alpha)}: so(3) \times so(3) \to \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta) \mapsto \sum_i m_i \langle \xi q_i(0), \eta q_i(0) \rangle$

Hauptachsen sind ein Orthonormalsystem körperfester Drehachsen J_ν, sodass $I(J_\mu, J_\nu) = I_\nu \delta_{\mu\nu}$

e) $\alpha \wedge * \beta = (\alpha, \beta) dVol \quad \forall \alpha \in \Omega^k(M)$ (1)

f) $R = Id - \pi_E + \cos(\varphi) \pi_E + \sin(\varphi) J$ (1)

g) $I^{(\alpha)}(\xi, \eta) = I^{(\Gamma)}(\xi, \eta) + M \langle \xi a, \eta a \rangle$ für $\alpha = \Gamma + a$ (1)

h) E_{tang} stetig, D_{tang} macht einen Sprung um σ (2)

i) (i) $\Delta G(\cdot, p) = 0$ auf $U \setminus \{p\}$

(ii) $G(\cdot, p)|_{\partial U} = 0$

(iii) $G(\cdot, p) - \frac{1}{4\pi r_p}$ ist regulär in p

$G(A, B)/\varepsilon_0$ ist das el. Potential in A, wenn sich in B eine Einheitsladung befindet und ∂U geerdet ist. (3)

2) a) $\omega(t) = \dot{R} R^{-1}$

$q(t) = R(t) q \Rightarrow \dot{q}(t) = \dot{R}(t) q = \dot{R}(t) R^{-1}(t)\, q(t)$ ②

b) $R R^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow 0 = \dot{R} R^{-1} + R \dot{R}^{-1} \Leftrightarrow \dot{R} R^{-1} = - R \dot{R}^{-1} = -(\dot{R} R^{-1})^t$ ①

c) $\omega(t) = |\omega(t)|\, J(t)$

momentane Drehachse $D(t) = \alpha(0) + \mathbb{R} \cdot \operatorname{Ker} J(t)$

Punkte im Abstand $|\Pi_{E(t)}\, q(t)| = d$ von der momentanen Drehachse haben Geschwindigkeit $d \cdot |\omega(t)|$. ②

3) a) $E(t) = \frac{1}{2} m \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle + U(\gamma(t))$

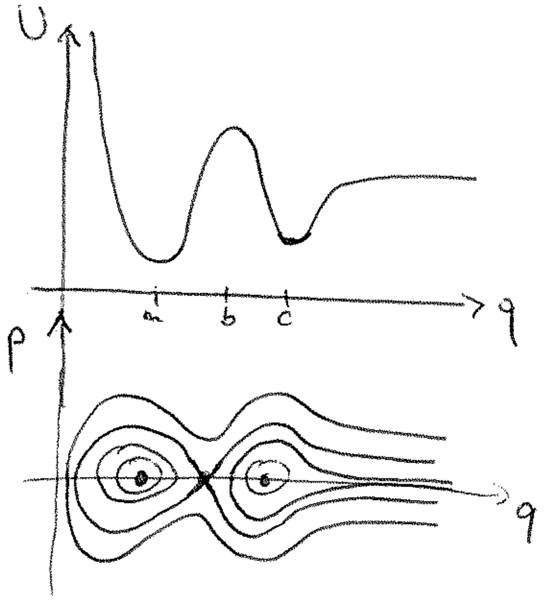
$\frac{dE}{dt} = m \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle - F(\gamma)(\dot{\gamma}) = 0$ ②

2. Newtonsches Axiom

b) $L = I(m\dot{q}) \otimes q - I(q) \otimes m\dot{q}$

$\frac{dL}{dt} = I(m\ddot{q}) \otimes q + \underbrace{I(m\dot{q}) \otimes \dot{q} - I(\dot{q}) \otimes m\dot{q}}_{=0} - I(q) \otimes m\ddot{q}$

$= 0$ weil $q \propto \ddot{q}$ ②

4) 

③

— Teil B —

5) $H = \frac{1}{2}(\dot q_1 \ \dot q_2) \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(q_1 \ q_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ 1

char. Frequenzen: $0 \stackrel{!}{=} \mathrm{Det}(B - \lambda A) = \begin{vmatrix} 2k-\lambda m & -k \\ -k & k-\lambda m \end{vmatrix}$ 2

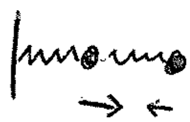
$= k^2 - 3k\lambda m + \lambda^2 m^2$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{3k}{m}\lambda + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{k}{2m}(3 \pm \sqrt{5})$

Normalschwingungen:

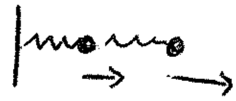
zu λ_1: $(Q_1 \ Q_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} = (0 \ 0)$ 2

$Q_1 := 1 \leadsto Q_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$



zu λ_2: $(Q_1 \ Q_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} = (0 \ 0)$ 2

$Q_1 := 1 \leadsto Q_2 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$



6) a) 10 Parameter: 4 Translationen

3 Rotationen / Eulerwinkel (2)

3 Boosts

$\cancel{e}$ $b=0$ $w=a=0$ $R=\mathbb{1}$

b) $(gg')^*(t,x) = g^*(t+b', R'x+w't+a')$

$= (t+b'+b, R(R'x+w't+a') + w(t+b')+a)$ (2)

$= (t+\underbrace{(b'+b)}_{b''}, \underbrace{(RR')}_{R''}x + \underbrace{(Rw'+w)}_{w''}t + \underbrace{(Ra'+wb'+a)}_{a''})$

c)

$b''=0 \Rightarrow b'=-b$

$R''=\mathbb{1} \Rightarrow R'=R^{-1}$ (2)

$w''=0 \Rightarrow w'=-R^{-1}w$

$a''=0 \Rightarrow a'=R^{-1}(wb-a)$

7) a) $\rho = dD = \epsilon_0 * E = \epsilon_0 \, d\left(f(r)\, r^2 \tau\right)$

$\rho = \chi(r)\, d\mathrm{Vol}$

$$= \frac{\epsilon_0}{r^2}\, \partial_r \left(f(r)\, r^2\right) \underbrace{r^2\, dr \wedge \tau}_{d\mathrm{Vol}}$$

3

$$\Rightarrow \quad f(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \chi(r')\, r'^2\, dr'$$

b) Volumen der Kugelschale: $V = \frac{4}{3}\pi \left(R_a^3 - R_i^3\right)$; $\rho_0 := \frac{Q}{V}$

$$\chi(r) = \begin{cases} 0 & ; \; r < R_i \\ \rho_0 & ; \; R_i \leq r \leq R_a \\ 0 & ; \; r > R_a \end{cases}$$

1

$$\Rightarrow \quad E = \begin{cases} 0 & ; \; r < R_i \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{3} R_i^3\right) dr & ; \; R_i \leq r \leq R_a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr & ; \; r > R_a \end{cases}$$

1

$$\Rightarrow \quad \Phi = \begin{cases} C_1 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(-\frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{3}\frac{R_i^3}{r}\right) + C_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + C_3 \end{cases}$$

1

Wähle $C_3 = 0$, d.h. $\Phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

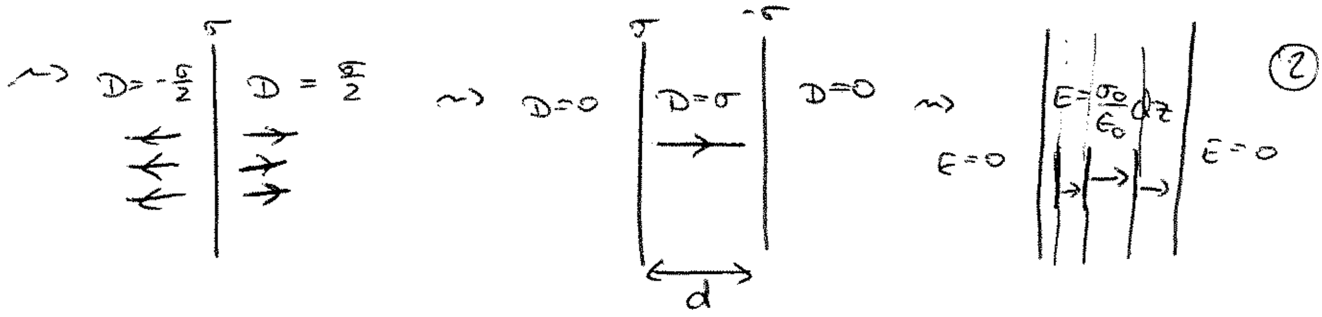
damit (Stetigkeit von Φ)

$$C_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a^2} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{6} R_a^2 + \frac{1}{3}\frac{R_i^3}{R_a}\right)$$

1

$$C_1 = C_2 - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} R_i^2$$

8) Platte mit Flächenladungsdichte $\sigma = \sigma_0 [dx \wedge dy, \mathbb{R}]$



$\rightsquigarrow$ Spannung $U = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{A\epsilon_0} d$ (1) $\rightsquigarrow$ Kapazität pro Fläche (1) $\frac{\epsilon_0}{d}$

(1) für Visualisierung

9) $\dot{\tilde{\omega}}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \text{const}$. Setze $\Omega := \tilde{\omega}_3 \dfrac{I_3 - I_1}{I_2} = \text{const}$.

Es verbleiben die Gleichungen

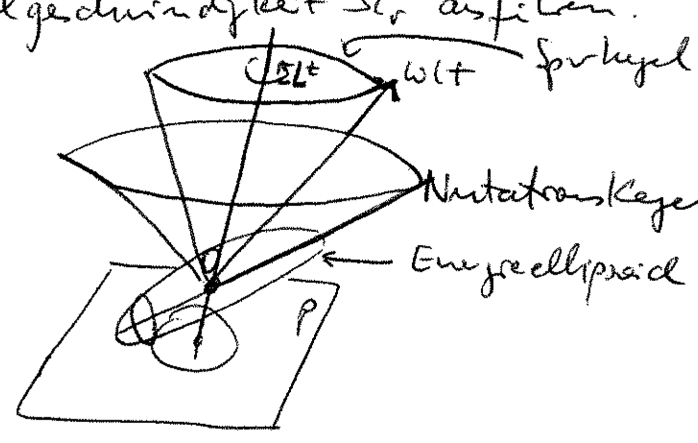
$$\dot{\tilde{\omega}}_1 = -\Omega \tilde{\omega}_2 \qquad \dot{\tilde{\omega}}_2 = \Omega \tilde{\omega}_1$$

mit Lösungen
$$\tilde{\omega}_1(t) = \omega_\perp \cos(\Omega t + \phi)$$
$$\tilde{\omega}_2(t) = \omega_\perp \sin(\Omega t + \phi)$$
3

$\tilde{\omega}$ führt eine reguläre Präzession um die Figurenachse $f_3 = \tilde{f}$ aus (körperfestes System). 1

Die Figurenachse $f(t) = R(t)\tilde{f}R(t)^{-1}$ und die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des kräftefreien symmetrischen Kreisels liegen zu allen Zeiten koplanar zum Drehimpuls $L^t \in so(3)^*$, um den sie eine reguläre Präzession mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω_r ausführen. 2

Bild geht auch:



10) a) $\langle \Phi, \rho' \rangle = \langle \Phi', \rho \rangle$ (1)

b) Poisson: $\rho^{(i)}$ vorgegeben, Rand geerdet

Dirichlet: $\rho^{(i)} = 0$, $\Phi^{(b)}$ vorgegeben (2)

in beiden Fällen komplementäres Potential / Ladung gesucht

c) $-k_R(p)$ ist die Influenzladung am Randknoten R, die bei geerdetem Rand von einer Einheitsladung in p verursacht wird (1)

Superpositionsprinzip ergibt $\rho_R^{(b)} = -\sum_{\text{innen}} k_R(p)\, \rho_p^{(i)}$

d) a) schreiben als (1)

$$\sum_{\text{innen}} \Phi(A)\rho_A' + \sum_{\text{Rand}} \Phi(B)\rho_B' = \sum_{\text{innen}} \Phi'(A)\underbrace{\rho_A}_{=0\ \text{(Dirichlet)}} + \sum_{\text{Rand}} \Phi'(B)\underbrace{\rho_B}_{=0\ \text{(Poisson)}} = 0$$

(1)

e) Für $\rho_A' = \delta_{A,p}$ ist $\rho_R' = -k_R(p)$ (siehe c).

Damit $\Phi^{(i)}(p) = \sum_{\text{Rand}} \Phi^{(b)}(R)\, k_R(p)$. (2)