Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. M. Zirnbauer
D. Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I
Zweite Prüfung

SS 15

Hinweise: Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel. Geben Sie am Ende der Prüfung bitte kein Konzeptpapier mit ab und reichen Sie von jeder Aufgabe nur eine Bearbeitung ein. Es empfiehlt sich, zuerst das Aufgabenblatt komplett durchzulesen.
Zum Bestehen müssen Sie in Teil A **16 Punkte** von 30 möglichen erreichen und insgesamt **29** von 69 möglichen Punkten.

Beschreiben Sie bitte **keine Rückseiten**.

Teil A

Dieser Teil der Prüfung enthält Aufgaben zu den Grundlagen der Vorlesung.

1. Kurzfragen

3+2+1+3+1+4+2+3=19 Punkte

Bitte bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben **kurz** und **präzise**.

a) Geben Sie die drei Newtonschen Gesetze an.

b) Geben Sie an, wie ein allgemeines Element der Galilei-Gruppe auf ein Ereignis $(t, \mathbf{x})$ wirkt und erläutern Sie die vorkommenden Parameter.

c) Wie lautet das Galileische Relativitätsprinzip?

d) Definieren Sie folgende Begriffe: Drehgruppe, $\mathfrak{so}(3)$, Winkelgeschwindigkeit.

e) Es sei $\beta \in \Omega^k(M)$. Durch welche Forderung ist $*\beta$ definiert?

f) Geben Sie den Satz von Poinsot an und erläutern Sie die verwendeten Begriffe.

g) Geben Sie die beiden Greenschen Identitäten an.

h) Wie misst man D?

2. Zweites Keplersches Gesetz

3 Punkte

Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2$ eine (zweimal stetig differenzierbare) Bahnkurve eines Massenpunkts im Zentralpotential und Ω die Volumenform von $\mathbb{E}_2$. Geben Sie mit Hilfe von Ω einen Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit an und beweisen Sie, dass diese konstant ist.
Hinweis: $\mathbb{E}_2$ taucht auf, da die Bewegung aufgrund des erhaltenen Drehimpulses in einer Ebene verläuft.

3. Plattenkondensator

4+1=5 Punkte

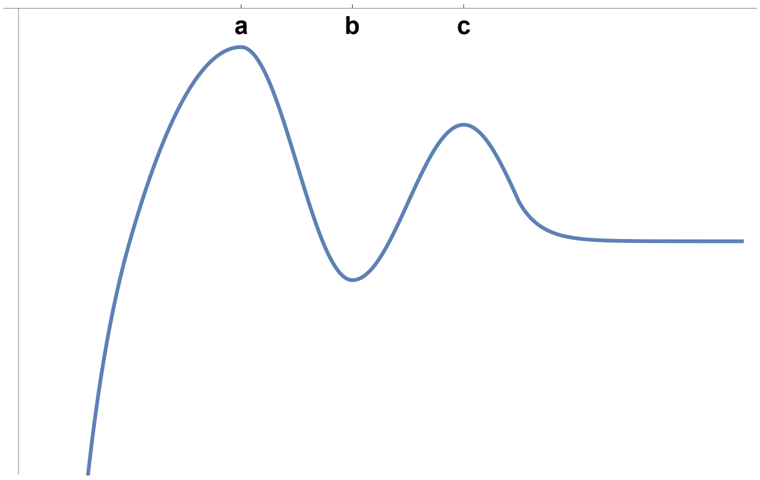
a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Anschlussbedingung für D die Kapazität pro Flächeneinheit eines Kondensators, der aus zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Metallplatten im Abstand d gebildet wird.

b) Visualisieren Sie das elektrische Feld (für den Plattenkondensator) als Ketten $D \in C_1(K)$ und $E \in C_2(\tilde{K})$.

4. Phasenportrait

3 Punkte

Wir betrachten ein autonomes Hamiltonsches System mit einem Freiheitsgrad. Skizzieren Sie für das abgebildete Potential ein Phasenportrait.

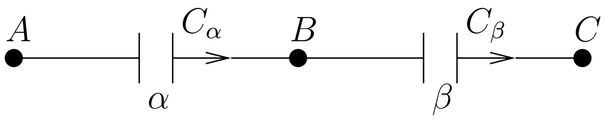


Teil B

Teil B enthält Aufgaben, die etwas näher an den üblichen Übungsaufgaben liegen.

5. Kondensatoren in Reihe

2+1+1+1+2+1=8 Punkte



a) Geben Sie die Definition des Netzwerk-Laplace-Operators Δ an und bestimmen Sie für das abgebildete Netzwerk eine Matrixdarstellung von Δ.

Im Folgenden seien A und C Randknoten und B ein innerer Knoten.

b) Zur Behandlung des abgebildeten Netzwerks als Dirichlet-Problem sind gewisse Knotenladungen und Potentiale vorzugeben. Welche sind dies, und was sind geeignete Werte für sie?

c) Geben Sie die definierenden Eigenschaften der Greenschen Funktion G sowie deren Interpretation an.

d) Berechnen Sie G.

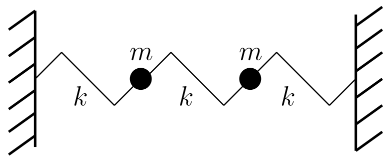
e) Berechnen Sie den Poisson-Kern und lösen Sie mit seiner Hilfe das Dirichlet-Problem.

f) Bestimmen Sie aus Ihrer Lösung die Gesamtkapazität zweier in Reihe geschalteter Kondensatoren.

6. Schwingungen

7 Punkte

Die Abbildung zeigt ein eindimensionales System aus zwei Punktmassen m, die durch Federn der Stärke k verbunden sind. Berechnen Sie die charakteristischen Frequenzen sowie die Normalschwingungen. Skizzieren Sie anschließend die Normalschwingungen.



7. Bildladungen

2+3+2=7 Punkte

Eine elektrische Ladung q befinde sich im Abstand l zu einer unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatte.

a) Welche Kraft wirkt auf die Ladung?

b) Berechnen Sie die durch die Ladung q in der Platte erzeugte Influenzladungsdichte.

c) Nun befinde sich eine zweite Ladung q' in Entfernung a zu q auf derselben Seite der Platte. Der Abstand von q' zur Platte sei auch l. Welche Kraft wirkt nun auf q?

8. Trägheitstensor und Symmetrieachsen

2+3+2+2=9 Punkte

Es sei $\{e_x, e_y, e_z\}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums V und $\{J_{zy}, J_{xz}, J_{yx}\}$ mit

$$J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i)$$

die zugehörige ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{so}_3$. Der Trägheitstensor hat bzgl. dieser Basis die bekannte Darstellung

$$I = \sum_k m_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix} ,$$

wobei x_k, y_k, z_k die Koordinaten des k-ten Massenpunkts sind. Zeigen Sie:

a) Die Ausdrücke in den ersten beiden Spalten der ersten Zeile sind korrekt.

b) Ist ein starrer Körper in Form- und Massenverteilung unter Spiegelung an einer Ebene symmetrisch, so liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene. In derselben Ebene liegen zwei der Hauptträgheitsachsen, die dritte steht senkrecht auf ihr.

Wir betrachten im Folgenden eine homogene Kugel der Gesamtmasse M mit Radius R.

c) Berechnen Sie den Trägheitstensor bzgl. des Schwerpunkts.
Hinweis: $\int_0^\pi \sin^3(x)dx = \frac{4}{3}$.

d) Berechnen den Trägheitstensor bzgl. eines Punkts auf der Oberfläche der Kugel.

9. Zweikörperproblem mit Zentralkräften

2+2+2+2=8 Punkte

Wir betrachten ein abgeschlossenes System aus zwei Massenpunkten m_1, m_2, die über eine Zentralkraft wechselwirken.

a) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Systems sich geradlinig-gleichförmig bewegt.

b) Zeigen Sie durch Einführen des Relativvektors q, dass die Relativbewegung der Beziehung $\langle m\ddot{q}, \cdot \rangle = F$ mit reduzierter Masse m und $F = F_{12}$ genügt.

Bekanntermaßen ist der Drehimpuls der Relativbewegung L erhalten. Wir führen nun die orthogonale Zerlegung

$$p(t) = p_\perp(t) + p_\parallel(t) \ , \quad \langle \mathcal{I}^{-1}(p_\perp(t)), q(t) \rangle = 0$$

sowie das zeitabhängige Orthonormalsystem

$$f_1(t) = \frac{\mathcal{I}(q(t))}{|q(t)|} \ , \quad f_2(t) = \frac{p_\perp(t)}{|p_\perp(t)|}$$

ein.

c) Zeigen Sie, dass $Lf_1(t) = |L| f_2(t)$ mit $|L| = |q(t)||p_\perp(t)| = \text{const}$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie in der Form $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r)$ geschrieben werden kann; finden Sie insbesondere einen Ausdruck für das effektive Potential $V(r)$.