Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt 4

SS 2015

Abgabe: 05.05.
Besprechung: 07.05. in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/ktpi15

13. Generatoren der Drehgruppe

Der in der Vorlesung verwendete Isomorphismus $\mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^*$ kam in der Vorlesung über mathematische Methoden bereits mehrmals implizit zum Zuge: Die lineare Abbildung

$$L : U \to V, u \mapsto (\vartheta_1(u) - \vartheta_2(u))f_1 + 3\vartheta_2(u)f_3$$

aus der ersten Prüfung entspricht beispielsweise dem Tensor

$$f_1 \otimes (\vartheta_1 - \vartheta_2) + 3f_3 \otimes \vartheta_2 \ \in V \otimes V^* \ .$$

Zeigen Sie, dass jedes $X \in V \otimes V^*$ der Form

$$X = u \otimes \mathcal{I}(u') - u' \otimes \mathcal{I}(u)$$

mit $u, u' \in V$ folgende Gleichung löst:

$$\langle Xv, v' \rangle + \langle v, Xv' \rangle = 0 \ \forall v, v' \in V \ .$$

14. Kepler-Problem

Die Radialkomponente r der Relativkoordinate im Zweikörperproblem mit Zentralkraft genügt der Gleichung

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r) \ , \text{ wobei } V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \ .$$

E ist die Energie, l der Drehimpuls der Relativbewegung.

a) Diskutieren Sie kurz anhand einer Skizze des effektiven Potentials $V(r)$ die Bahnen im Keplerpotential $U(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$).

b) Berechen Sie die Bahnkurven $r(\varphi)$ im Keplerpotential für $E < 0$ ausgehend von der DGL (vgl. Vorlesung)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2\sqrt{E - V(r)}} \ .$$

Tipp: Substituieren Sie $r = 1/u$.

c) Wie *b*), jedoch mit dem Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \ , \ \ \alpha, \beta > 0 \ .$$

Um welchen Winkel verlagert sich das Perizentrum je Umlauf?

15. Drittes Kepler'sches Gesetz

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz verhalten sich die quadrierten Umlaufzeiten T^2 der Planeten wie die Kuben ihrer großen Halbachsen a^3, d.h. T^2/a^3 nimmt für alle Planeten des Sonnensystems den gleichen Wert an. Eine leicht abgeschwächte Version dieses Gesetzes kann ohne großen Aufwand mit einem Skalenargument gezeigt werden, wie wir in dieser Aufgabe erörtern wollen.
Eine spezielle Lösung $\vec{r}(t)$ der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\alpha}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

liefert durch geeignetes Umskalieren eine Schar von Lösungen

$$\vec{r}_s(t) = s\vec{r}(s^{-3/2}t) \ , \quad s > 0 \ ,$$

die jeweils dieselbe Exzentrizität ϵ wie $\vec{r}(t)$ besitzen.

a) Verifizieren Sie, dass $\vec{r}_s(t)$ tatsächlich eine Lösung der Bewegungsgleichung ist.

b) Zeigen Sie, dass Umlaufzeit T_s und große Halbachse a_s einer Bahn $\vec{r}_s(t)$ durch

$$T_s = s^{3/2}T_1 \text{ und } a_s = sa_1$$

gegeben sind, wobei T_1 und a_1 Umlaufzeit und große Halbachse der ursprünglichen Bahn $\vec{r}(t)$ sind. Was folgt hieraus für T_s^2/a_s^3?

c) Formulieren und beweisen Sie ein analoges Gesetz für Bahnen im Potential $U(r) = -\alpha/r^h$ mit $h > 0$.

16. Drehimpuls bei verschwindendem Gesamtimpuls

Zeigen Sie, dass für ein N-Körpersystem der Drehimpuls L von der Wahl des Bezugspunkts o unabhängig ist, wenn der Gesamtimpuls P verschwindet.

17. SO_2

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \middle| \phi \in [0, 2\pi) \right\}$$

zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. Diese nennt man SO_2 (spezielle orthogonale Gruppe).
Zeigen Sie ferner, dass

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Generator dieser Gruppe ist, d.h. dass man jedes $g \in \mathrm{SO}_2$ in der Form $g = \exp(\phi X)$ schreiben kann; dieser Ausdruck ist dabei durch Einsetzen in die Potenzreihe der Exponentialfunktion definiert.