Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt 6

SS 2015

Abgabe: 19.05.
Besprechung: 21.05.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/ktpi15

22. Determinante

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $0 \neq \Omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$. Die Determinante einer linearen Abbildung $A \in \mathrm{End}(V)$ ist erklärt durch

$$\Omega(Av_1, Av_2, \ldots, Av_n) = \Omega(v_1, v_2, \ldots, v_n)\mathrm{Det}(A) \ .$$

Zeigen Sie:

a) Die Determinante hängt nicht von der Wahl von Ω ab.

b) Für die Matrixdarstellung (A_{ij}) von A bezüglich einer Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ von V gilt

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) A_{\pi(1)1} \cdots A_{\pi(n)n} \ .$$

c) Für $A, B \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$.

d) $\mathrm{Det}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) \neq 0$.

23. Adjungierte Abbildungen

Seien $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ euklidische Vektorräume. Zu $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$ definiert man die adjungierte Abbildung $A^T \in \mathrm{Hom}(V, U)$ durch

$$\langle v, Au \rangle_V = \langle A^T v, u \rangle_U \ .$$

Zeigen Sie:

a) Zwischen der transponierten Abbildung A^t und der adjungierten Abbildung A^T besteht der Zusammenhang

$$A^T = \mathcal{I}_U^{-1} \circ A^t \circ \mathcal{I}_V \ .$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{I}$ den euklidischen Isomorphismus.

b) Sei zusätzlich $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $B \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt $(BA)^T = A^T B^T$.

c) Ist $A \in \mathrm{End}(U)$ symmetrisch, d.h. gilt $A = A^T$, so ist die Matrixdarstellung von A bzgl. einer Orthonormalbasis von U symmetrisch.

d) Ist $A \in \mathrm{End}(U)$ symmetrisch und sind $u, v \in V$ zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$, so sind u und v orthogonal.

24. Orthogonale Abbildungen

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Die lineare Abbildung $R \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann orthogonal, wenn $RR^T = \mathrm{Id}$ gilt.

b) Für die Matrixdarstellung (R_{ij}) einer orthogonalen Abbildung $R \in O(V)$ bezüglich einer Orthonormalbasis von V gilt $(R^{-1})_{ij} = R_{ji}$.

25. $\mathfrak{so}(3) \simeq (\mathbb{R}^3, \times)$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)\ , \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren ist, wenn man $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt ausstattet. Dazu müssen Sie zeigen, dass es sich um einen Vektorraumisomorphismus handelt, der zusätzliche die Algebra-Struktur erhält.