Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt 7

SS 2015

Abgabe: 09.06.
Besprechung: 11.06.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/ktpi15

26. Beschleunigte Bezugssysteme

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Bewegung eines starren Körpers (nach Wahl eines Aufpunkts a) in einer Kurve $t \mapsto (\alpha(t), R(t))$ in der euklidischen Bewegungsgruppe kodiert ist. Die Bewegung eines körperfesten Punkts γ wird durch die Formel $\gamma(t) = \alpha(t) + R(t)(\gamma(0) - \alpha(0))$ ausgedrückt. Nun betrachten wir einen Punkt, der sich auf dem starren Körper bewegt (z.B. eine Ameise auf einem Kinderkreisel). Die Bewegung $t \mapsto \gamma(t)$ des Punkts erfassen wir, in dem wir den körperfesten Ortsvektor $\gamma(0) - \alpha(0) = \tilde{q}(0)$ durch den zeitlich veränderlichen Ortsvektor $\tilde{q}(t)$ ersetzen, also $\gamma(t) = \alpha(t) + R(t)\tilde{q}(t)$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der starre Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert: $\dot{R}R^{-1} = \omega = \text{const}$. Wir schreiben $\omega^2 = -|\omega|^2 \Pi_E$.
Verifizieren Sie ausgehend vom Newtonschen Bewegungsgesetz $\langle m\ddot{\gamma}, \cdot \rangle = F$ das folgende Ergebnis für die Beschleunigung $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{q}$ im körperfesten System:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\tilde{q} = \tilde{f} - R^{-1}m\ddot{\alpha} + m|\omega|^2\Pi_E\tilde{q} - 2m\tilde{\omega}\frac{d}{dt}\tilde{q}.$$

$\tilde{f} = R^{-1}\mathcal{I}^{-1}(F)$ ist hierbei der Kraftvektor im körperfesten System. Die letzten drei Terme auf der rechten Seiten heißen Scheinkräfte, die letzten beiden sind die Zentrifugal- bzw. Corioliskraft.

27. Polarisationsformel

Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem reellen Vektorraum V und $q : V \to \mathbb{R}$; $v \mapsto q(v) = b(v,v)$ die zugehörige quadratische Form. Beweisen Sie die sog. Polarisationsformel

$$b(v,w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)) \; .$$

Bemerkung: Diese Identität liefert die Berechtigung dafür, dass man den als quadratische Form eingeführten Trägheitstensor auch als symmetrische Bilinearform auffassen darf.

28. Basisdarstellung des Trägheitstensors

Es sei $\{e_x, e_y, e_z\}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums V und $\{J_{zy}, J_{xz}, J_{yx}\}$ mit

$$J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i)$$

die zugehörige ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{so}_3$. Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor bzgl. dieser Basis die aus der Experimentalphysikvorlesung bekannte Darstellung

$$I = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

hat, wobei x_i, y_i, z_i die Koordinaten des i. Massenpunkts sind.

29. Hauptachsen und Symmetrieachsen

Zeigen Sie: Ist ein starrer Körper in Form- und Massenverteilung unter Spiegelung an einer Ebene symmetrisch, so liegt der Schwerpunkt in dieser Ebene. In derselben Ebene liegen zwei der Hauptträgheitsachsen, die dritte steht senkrecht auf ihr.

30. Hauptträgheitsmomente

Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente folgender homogener Körper:
a) Ein Quader mit Kantenlängen a, b, c.

b) Ein Zylinder mit Höhe H und Radius R.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 29!

31. Berechnung eines Trägheitstensors

Bestimmen Sie den Trägheitstensor eines homogenen Würfels bzgl. einer seiner Eckpunkte.

32. Drehimpulserhaltung

Eine homogene Kugel vom Radius R_0 drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Nun schrumpfe die Kugel innerhalb eines Zeitintervalls durch den Einfluss innerer (Zentral-)Kräfte auf einen kleineren Radius $R_1 < R_0$. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit nach der Schrumpfung, wenn die Masse erhalten und homogen verteilt bleibt? Ist die Rotationsenergie während des Schrumpfens konstant?

Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben ist freiwillig, d.h. sie gehen nicht in die Festlegung der Zulassungsgrenze ein. Sie können also zwei Bonuspunkte erwerben.

33. Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Auf einem komplexen Vektorraum V sind Skalarprodukte nicht bilinear und symmetrisch, sondern sesquilinear und hermitesch, d.h. für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v, w \in V$ gilt $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ und $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$. Insbesondere folgt hieraus $\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$. Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist der adjungierte Operator $f^\dagger$ durch die Gleichung $\langle v, f(w)\rangle = \langle f^\dagger(v), w\rangle$ bestimmt. Gilt $f = f^\dagger$, so nennt man f selbstadjungiert; dieser Begriff wird mitunter auch für reelle Vektorräume verwendet (in der Vorlesung nannten wir ein solches f symmetrisch). Die Inhalte von Aufgabe 23b,d übertragen sich wortwörtlich auf den komplexen Fall; die Matrixdarstellung eines selbstadjungierten Operators ist allerdings hermitesch, d.h. es muss nicht nur transponiert, sondern auch komplex konjugiert werden. Wir wollen den für die Physik ausgesprochen wichtigen[1] Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren beweisen: Zu jedem selbstadjungierten Operator $f \in \mathrm{End}(V)$ gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, die Eigenwerte von f sind reell und V ist die orthogonale Summe der Eigenräume. Gehen Sie in folgendermaßen vor:

a) Die Eigenwerte von f sind reell.

b) Das charakteristische Polynom von f zerfällt in reelle Linearfaktoren.
Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra. Hieraus folgt insbesondere, dass der Operator f auch im reellen Fall stets einen Eigenwert besitzt.

c) Ist $W \subset V$ ein f-invarianter Unterraum, so ist auch das orthogonale Komplement $W^\perp$ f-invariant.

d) Beweisen Sie nun den Spektralsatz induktiv. Ausgangspunkt ist, dass f nach b) einen Eigenwert besitzt.

34. Hauptachsentransformation

Die Existenz der Hauptträgheitsachsen wird durch folgenden Satz gesichert, den wir hier nur für den reellen Fall formulieren und beweisen[2]: Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $I : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, so existiert eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$, die zugleich eine Orthogonalbasis bzgl. I ist. Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Durch $f \mapsto \Phi_f$ mit $\Phi_f(v, w) = \langle v, f(w)\rangle$ wird ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren auf V und dem Raum der symmetrischen Bilinearformen auf V definiert.

b) Verwenden Sie den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren, um den Satz über die Hauptachsentransformation zu folgern.

Hinweis: Die Bezeichnung dieses Satzes ist in der Literatur leider nicht einheitlich, mitunter wird auch bloßes Diagonalisieren von Matrizen schon Hauptachsentransformation genannt.

[1] Er spielt eine zentrale Rolle in der Quantenmechanik.
[2] Der Beweis funktioniert im Komplexen aber analog.