Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt 8

SS 2015

Abgabe: 16.06.
Besprechung: 18.06.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/ktpi15

35. Stabilität stationärer Drehungen

Wir betrachten einen starren Körper mit paarweise verschiedenen Hauptträgheitsmomenten $I_i \neq I_j$, auf den keine Drehmomente wirken.

a) Geben Sie zu den Eulerschen Gleichungen

$$I_1\dot{\tilde{\omega}}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3(I_3 - I_2) = 0 \text{ (und zyklisch)}$$

konstante Lösungen $\tilde{w} \neq 0$ an. Beschreiben Sie kurz die Bewegung des Körpers im Raum.

b) Betrachten Sie nun eine kleine Abweichung von der stationären Drehung: $\tilde{\omega}_1(t) = \tilde{\Omega} + \Delta\tilde{\omega}_1(t)$, und $\tilde{\omega}_2(t), \tilde{\omega}_3(t) \ll \tilde{\Omega}$ mit konstantem $\tilde{\Omega}$. Leiten Sie mit diesem Ansatz die Differentialgleichungen $\ddot{\tilde{\omega}}_i = \lambda\tilde{\omega}_i(t)$ $(i = 2, 3)$ her. Vernachlässigen Sie dazu quadratische Ausdrücke in $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$.

c) Zeigen Sie, dass die Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments instabil ist, die Rotation um die anderen beiden Achsen hingegen stabil. Lösen Sie dazu die Differentialgleichungen für $\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$. Achten Sie auf die unterschiedlichen Möglichkeiten abhängig vom Vorzeichen von λ.

36. Stabilität stationärer Drehungen II

Verwenden Sie den Satz von Poinsot, um die Aussage von Aufgabe 35 noch einmal anschaulich zu begründen.

37. Orthogonale Zerlegung in $\mathfrak{so}(3)$

Durch $\langle A, B\rangle_{\mathfrak{so}(3)} = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A^T B)$ wird ein zum euklidischen Skalarprodukt auf $V \simeq \mathbb{R}^3$ passendes Skalarprodukt auf $\mathfrak{so}(3)$ definiert. Zeigen Sie: Ist $J \in \mathfrak{so}(3)$ ein Generator und $A \in \mathfrak{so}(3)$, so liefert

$$A = A_\perp + A_\| \ , \quad A_\perp = -[J, [J, A]] \ , \quad A_\| = A + [J, [J, A]]$$

die Orthogonalzerlegung von A in zwei Komponenten, die zur J-Achse senkrecht bzw. parallel stehen ($A_\perp$ bzw. $A_\|$). Der senkrechte Anteil hat die Länge $|A_\perp| = |[J, A]|$.
Hinweis: Für $B = [J, A]$ ist die Abbildung $B \mapsto [J, B]$ eine Isometrie, d.h. es gilt $|[J, [J, A]]| = |[J, A]|$.

38. Spurkurve

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei ein homogener Zylinder (Höhe $H = 6cm$, Radius $R = 2cm$) längs der e_3-Achse orientiert. Der Zylinder rotiere frei um seinen fixierten Schwerpunkt und es gelte $\omega(0) = (J_1 + J_3)s^{-1} \equiv (1, 0, 1)s^{-1}$. Bestimmen Sie die Spurkurve auf der invariablen Ebene, entlang derer das Energieellipsoid abrollt.

39. Luftwirbel, Eisenbahnen und Corioliskraft

a) Die Abbildung zeigt ein Tiefdruckgebiet über Island. Naiv erwartet man, dass Luft geradewegs in das Zentrum des Tiefdruckgebiets strömt; dennoch erkennt man deutlich, dass dem nicht so ist. Woran liegt das?

b) Ein urbaner Mythos besagt, dass sich bei Eisenbahnstrecken in der nördlichen Hemisphäre, die nur in einer Richtung befahren werden, die rechte Schiene stärker abnutzt als die linke. Wie kommt man zu dieser Behauptung und ist sie realistisch?