Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

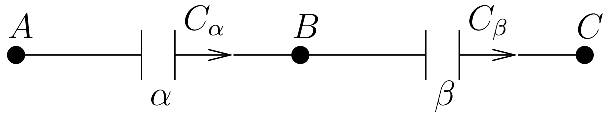
Blatt 10

SS 2015

Abgabe: 30.06.
Besprechung: 02.07.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/ktpi15

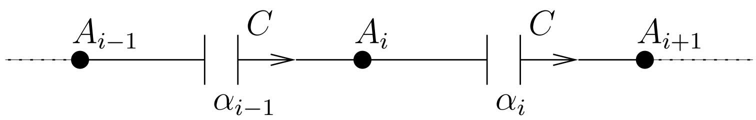
44. Kondensatoren in Reihe

Die Abbildung zeigt den Komplex für eine einfache kapazitive Schaltung. Wir erden den Knoten A und schließen den Knoten C an eine Spannungsquelle an. B ist isoliert und neutral. Was sind die physikalisch sinnvollen Randbedingungen? Benutzen Sie die vollständigen Randbedingungen, um das Potential und die Ladung ρ zu bestimmen. Es sei $\gamma = \alpha + \beta$. Wie groß ist C_γ?



45. Kondensatoren in Reihe II

Wir betrachten nun eine unendliche lange Reihe von Kondensatoren wie in der Abbildung dargestellt. Die Kapazitäten seien identisch. In diesem Fall kann heuristisch der Übergang zum Kontinuum vollzogen werden: Wir betten den Komplex so in $\mathbb{R}$ ein, dass die Knoten A_i den Abstand $\epsilon > 0$ haben. Potential und Ladung auf dem i. Knoten sind dann $\Phi_i \equiv \Phi(x_i = i\epsilon)$ und $\rho_i \equiv \rho(x_i = i\epsilon)$. Der Kontinuumslimes entspricht $\epsilon \to 0$; dabei gehen Differenzen in Ableitungen über: $\lim_{\epsilon\to 0}(\Phi_i - \Phi_{i-1})/\epsilon = [d\Phi(x)/dx]_{x=x_i}$. Gleichzeitig muss aber C geändert werden, damit die Gesamtkapazität sich nicht ändert. Man könnte sich vorstellen, in einem Schritt ϵ zu halbieren und dabei einen Kondensator durch zwei in Reihe geschaltete zu ersetzen usw.



a) Zeigen Sie, dass $C\epsilon$ konstant gehalten werden muss, wenn die Gesamtkapazität sich nicht ändern soll.

b) Wenden Sie den Netzwerk-Laplaceoperator auf $\Phi = \sum_i \Phi_i A_i^*$ an und finden Sie somit eine Gleichung für die Koeffizienten ρ_i.

c) Da die Knotenladungen ρ_i im Limes $\epsilon \to 0$ immer kleiner werden, ist es sinnvoll, zur Ladungsdichte $\tilde{\rho}(x = i\epsilon) = \rho(x = i\epsilon)/\epsilon$ überzugehen. Führen Sie den Limes $\epsilon \to 0$ durch. Welche Bedeutung kommt $\lim_{\epsilon\to 0} C\epsilon$ im freien Raum zu?

46. Laplace und Green-Funktion

a) Es sei K ein 1-Komplex, der ein zusammenhängendes kapazitives Netzwerk darstellt. Knoten (0-Zellen) werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in C^0(K)$ und $A \in C_0$ gilt

$$\sum_{\text{alle A}} [f(A)(\Delta g)_A - g(A)(\Delta f)_A] = 0,$$

wobei $(\Delta g)_A \equiv \langle A^*, \Delta g \rangle$.

b) Verwenden Sie Aufgabenteil a, um die Symmetrie $G(X, Y) = G(Y, X)$ der Green-Funktion zu beweisen.

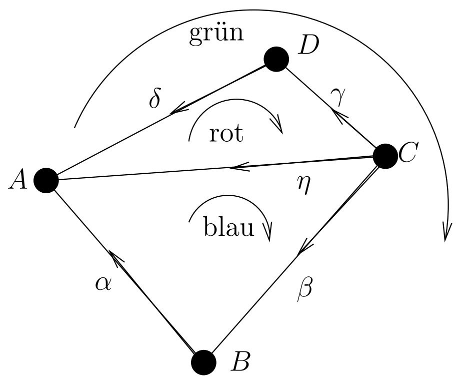
47. Einfaches zu Komplexen

a) Berechnen Sie für den unten abgebildeten Komplex den Rand der 1-Ketten $\alpha + \beta + \eta$ und $\gamma + \delta + \eta$.

b) Geben Sie eine Matrixdarstellung des Randoperators ∂ an. Wie wie viele geschlossene 1-Ketten gibt, d.h. was ist die Dimension von $Z_1(K)$?

c) Das Verschwinden des Randes einer 1-Kette π suggeriert, dass eine 2-Kette S existiert, deren Rand π ist, d.h. $\partial S = \pi$. Eine Basis solcher 2-Ketten sei durch "rot" und "blau" gegeben. Geben Sie eine Matrixdarstellung des Randoperators auf 2-Ketten an. Gibt es 2-Ketten mit $\partial S = 0$?

d) Wir könnten $C_2(K)$ sinnvoll um die 2-Kette "grün" erweitern, da deren Rand in $C_1(K)$ liegt. Gibt es jetzt 2-Ketten ohne Rand?



48. Massenpunkte auf einem Kreis

Betrachten Sie N Massenpunkte, die sich auf einem Kreis mit Radius R bewegen können. Benachbarte Massenpunkte seien dabei durch gleichartige Federn der Stärke k gekoppelt. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
Hinweis: Die Ergebnisse von Aufgabe 42 können helfen.