Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Klassische Theoretische Physik I

Blatt 12

SS 2015

Abgabe: 14.07.
Besprechung: 16.07.
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/ktpi15

53. Symmetrische Ladungsverteilungen

Wir betrachten in dieser Aufgabe kugel- bzw. zylindersymmetrische Ladungsverteilungen $\rho = \chi(r)\,\mathrm{dVol}$ ($\mathrm{dVol} = [dx \wedge dy \wedge dz, rechts]$ ist die Volumenform); da das Symbol ρ bereits für die Ladungsdichte reserviert wird, bezeichnen wir die radiale Koordinate in beiden Fällen mit r.

a) In Kugelkoordinaten gilt $*dr = [r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi, rechts]$. Setzen Sie den Ansatz $E = f(r)dr$ in die Maxwell-Gleichung $\rho/\epsilon_0 = d * E$ ein und folgern Sie $f(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^r \chi(r')r'^2 dr'$.

b) Wiederholen Sie a) für Zylinderkoordinaten. Hier gilt $*dr = [rd\phi \wedge dz, R]$.

c) Berechnen Sie das elektrische Feld und das Potential einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q sowie eines homogen geladenen, unendlich langen Zylinders mit Radius R und Ladung Q pro Länge L.

54. Metallische Kugel im homogenen Feld

Wir betrachten eine metallische Kugel mit Radius R, auf der eine Gesamtladung Q sitzt, und bringen diese in homogenes elektrisches Feld $E = E_0 dz$ ein.

a) Verwenden Sie den Ansatz $\Phi = f(r) + g(r)\cos\theta$, um aus der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ (in Kugelkoordinaten) Gleichungen für f und g zu bestimmen. Zeigen Sie hiermit

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{c_1}{r} + \left(\frac{c_3}{r^2} + c_4 r\right)\cos\theta + c_2 \ ,$$

wobei c_i Konstanten sind.

b) Welches Potential erwarten Sie für $r \to \infty$? Bestimmen Sie hieraus c_4.

c) Da die Kugel metallisch ist, ist ihre Oberfläche eine Äquipotentialfläche. Bestimmen Sie hieraus c_3.

d) Eine konzentrische Kugelschale mit Radius $R' > R$ schließt die Gesamtladung Q ein. Verwenden Sie $dD = \rho$ und den Satz von Stokes, um c_1 zu bestimmen.

55. Laplacegleichung mit Azimuthalsymmetrie

Wir wollen den in Aufgabe 54 gewählten Ansatz noch einmal formal begründen. Aus der Vorlesung ist Ihnen die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten bekannt. Im Falle azimuthaler Symmetrie hängt das Problem nicht vom Winkel ϕ ab, sodass sich die Laplace-Gleichung für das Potential Φ vereinfacht zu

$$\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\Phi) = 0\ .$$

a) Setzen Sie den sog. Separationsansatz $\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ in die Laplacegleichung ein. Durch geeignetes Sortieren erhalten Sie einen Ausdruck der Form $D_1(R) + D_2(\Theta) = 0$; hierbei sind D_1, D_2 Differentialoperatoren, die jeweils nur auf $R(r)$ bzw. $\Theta(\theta)$ wirken.

Eine Differentialgleichung dieser Form kann nur dann für alle r, θ erfüllt sein, wenn $D_1(R) = -D_2(\Theta) = \text{const}$ gilt. Man schreibt diese Konstante üblicherweise als $l(l+1)$.

b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $D_1(R) = l(l+1)$ mit dem Ansatz $R(r) = r^\alpha$.

Die physikalisch sinnvollen Lösungen der Differentialgleichung $D_2(\Theta) = -l(l+1)$ sind für $l \in \mathbb{N}_0$ von der Form $P_l(\cos\theta)$, wobei $P_l(x)$ das sog. l. Legendre-Polynom ist. Diese bilden (mit geeigneter Normierung) ein vollständiges Orthonomalsystem für $L^2([-1,1])$, d.h. es gilt

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \delta_{ll'}$$

und jede Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx < \infty$ lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x)\ , \quad f_l = \int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx\ .$$

Als Ergebnis des ersten Teils dieser Aufgabe hat im Falle azimuthaler Symmetrie das Potential daher die Form

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)\ .$$

c) Eliminieren Sie in der Situation von Aufgabe 54 die Konstante B mit Hilfe der Bedingung, dass das Potential auf der Kugeloberfläche verschwindet.

Eine explizite Darstellung der Legendre-Polynome ist die sog. Rodrigues-Formel:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l\ .$$

d) Berechnen Sie die ersten 3 Legendre-Polynome.

e) Argumentieren Sie nun, warum das Potential außerhalb der Kugel durch $\Phi(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$ gegeben ist.