60) a) $y'(x) = y^2(x) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = x + c$

allgemeine Lösung $y(x) = \frac{-1}{x+c}$

Anfangswert $y(0) = \frac{-1}{c} \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow c = -1$

Lösung des AWP ist daher $y(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $y'(x) = 2xy(x) + x^3$

homogene DGL: $y'(x) = 2xy(x) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = x^2 + \tilde{c}$

allgemeine Lösung $y(x) = ce^{x^2}$

Variation der Konstanten: $y(x) = c(x)e^{x^2}$ in die DGL einsetzen

$c'e^{x^2} + 2xce^{x^2} = 2x\,ce^{x^2} + x^3$

$\Leftrightarrow \quad c(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx \underset{u=x^2}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}\int ue^{-u} du = \frac{1}{2}\left(-ue^{-u} + \int e^{-u} du\right)$

$= -\frac{1}{2}(1+u)e^{-u} + \tilde{c} = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2} + \tilde{c}$

allgemeine Lösung $y(x) = \left(\tilde{c} - \frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2}\right)e^{x^2}$

Anfangswert $y(0) = \tilde{c} - \frac{1}{2} \overset{!}{=} 3 \Leftrightarrow \tilde{c} = \frac{7}{2}$

Lösung des AWP $y(x) = \frac{7}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}(1+x^2)$

c) $y'(x) = x(1-y(x))^2 \rightsquigarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \int x\,dx$

$\frac{1}{1-y^2}$ ist per Partialbruchzerlegung zu vereinfachen:

$\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} \underset{y \neq \pm 1}{\Longleftrightarrow} 1 = A(1+y) + B(1-y)$

Dies kann durch Koeffizientenvergleich $\begin{array}{l} 1 = A + B \\ 0 = A - B \end{array}$

gelöst werden. Es ist allerdings leichter, $\lim_{y \to \pm 1}$ zu betrachten:

$y \to +1: \quad 1 = 2A \qquad y \to -1: \quad 1 = 2B$

Also $\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)$.

damit: $\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y| = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{c}$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = c\,e^{x^2}$$

Wir können die Betragsstriche ignorieren und ein evtl. auftretendes Vorzeichen in c absorbieren.

$$\frac{1+y}{1-y} = c e^{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \frac{ce^{x^2}-1}{ce^{x^2}+1}$$

$$y(0) = \frac{c-1}{c+1} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 3$$

Lösung des AWP $\quad y(x) = \frac{3e^{x^2}-1}{3e^{x^2}+1}$

61) a) Für Startpopulationen $P_0 \ll P_\infty$ ist das Anfangswachstum annähernd exponentiell und wird durch den Term $P_\infty - P$ bei wachsendem P im Laufe der Zeit abgebremst. Die maximale Populationsgröße ist P_∞, da das Wachstum dann zum Erliegen kommt.

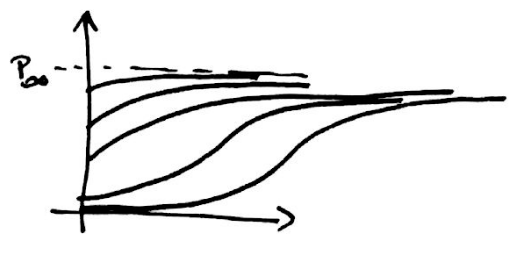
b) Wie in 60c) hat man $\frac{1}{P(P_\infty-P)} = \frac{1}{P_\infty}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{P_\infty - P}\right)$.

$$\int \frac{dP}{P(P_\infty-P)} = \frac{1}{P_\infty}\ln\underbrace{\frac{P}{P_\infty-P}}_{\text{ist für } P<P_\infty \text{ positiv}} = \int k\,dt = kt + \tilde{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad P = P_\infty \frac{c e^{P_\infty k t}}{1 + c e^{P_\infty k t}}$$

$$P(0) \overset{!}{=} P_0 = P_\infty \frac{c}{1+c} \Leftrightarrow c = \frac{P_0}{P_\infty - P_0}$$

Für $0<P_0 < P_\infty$ hat man die Graphen (abhängig davon, wie man $\frac{P_0}{P_\infty}$ wählt)



62) a) $m\dot{v} = -mg + kv^2$ (Koordinatensystem „nach oben" orientiert, d.h. Fallgeschwindigkeit hat neg. Vorzeichen)

b) Man erwartet physikalisch $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{v} = 0$ (Konstante Grenzgeschwindigkeit) und damit $v_\infty = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$

c) Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2} = \dfrac{-v_\infty}{2}\left(\dfrac{1}{v-v_\infty} - \dfrac{1}{v+v_\infty}\right)$

Daher

$$-\frac{1}{g}\int \frac{dv}{1-\underbrace{\frac{k}{mg}v^2}_{\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2}} = \frac{v_\infty}{2g}\ln\left|\frac{v-v_\infty}{v+v_\infty}\right| = t + \tilde{c}$$

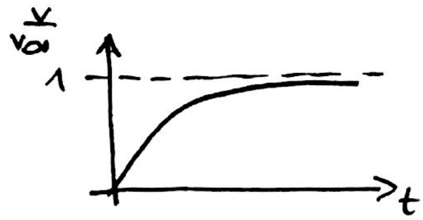
$$\Leftrightarrow \left|\frac{v-v_\infty}{v+v_\infty}\right| = c\, e^{\frac{2g}{v_\infty}t}$$

$$\Leftrightarrow v = v_\infty \frac{1-c\,e^{\frac{2g}{v_\infty}t}}{1+c\,e^{\frac{2g}{v_\infty}t}}$$

aus phys. Gründen
$v_\infty < v \le 0$
$\leadsto |v-v_\infty| = v - v_\infty$
$|v+v_\infty| = -v - v_\infty$

$$v(0) \overset{!}{=} 0 = v_\infty \frac{1-c}{1+c} \Leftrightarrow c = 1$$

$$v(t) = v_\infty \frac{1-e^{\frac{2g}{v_\infty}t}}{1+e^{\frac{2g}{v_\infty}t}}$$



63) Symmetrie und Linearität sind offensichtlich erfüllt. Es bleibt zu zeigen $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$.

„$\Leftarrow$" ist trivial. Für „$\Rightarrow$" betrachten wir die Kontraposition $f \neq 0 \Rightarrow \langle f,f\rangle \neq 0$ (sogar >0).

Angenommen es gibt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, dann ist $f^2(x_0) > 0$. f^2 ist stetig, da f stetig ist, also gibt es zu jedem $0<\epsilon< f^2(x_0)$ ein $\delta>0$ mit

$$f^2(x_0) > \epsilon \text{ auf } \begin{cases} (x_0-\delta, x_0+\delta) & \text{falls } x_0 \in (a,b) \\ [x_0, x_0+\delta) & \text{falls } x_0 = a \\ [x_0-\delta, x_0] & \text{falls } x_0 = b. \end{cases}$$

Wir betrachten nur noch $x_0 \in (a,b)$, die anderen beiden Fälle sind analog.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ f^2(x)\geq 0 \text{ auf } [a,b]}}{\geq} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Standardabschätzung}}}{\geq} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \epsilon\,dx = 2\delta\epsilon > 0$$

und damit $f \neq 0 \Rightarrow \langle f,f\rangle > 0$. $\square$