Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. M. Zirnbauer
D. Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik
Zweite Prüfung

WS 14/15

Hinweise: Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel. Es empfiehlt sich, zuerst das Aufgabenblatt komplett durchzulesen.

Beschreiben Sie **keine Rückseiten**.
Lassen Sie **oben links** genügend Platz zum Heften frei.
Reichen Sie von jeder Aufgabe **nur eine Bearbeitung** ein.
Reichen Sie **kein Konzeptpapier** ein.

Zum Bestehen benötigen Sie **30 Punkte**, davon **mindestens 20 aus Teil A**.

Teil A

Dieser Teil der Prüfung enthält Aufgaben zu den Grundlagen der Vorlesung.

1. Vektorrechnung

2+2=4 Punkte

$B = \{e_1, e_2\}$ sei eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass $e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_B$ und $e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}_B$ normiert und paarweise orthogonal sind.

b) Aus der Rechnung in a) folgt, dass $B' = \{e_1', e_2'\}$ eine Orthonormalbasis ist.
Bestimmen Sie nun die Spaltendarstellung von $v = 2e_1 - 5e_2$ bzgl. B'.

2. Lineare Abbildungen I

1+1+1=3 Punkte

Begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear bzw. nicht linear sind:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y\\x\end{pmatrix} \qquad g\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix} \qquad h\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x^2\\0\end{pmatrix}$$

3. Lineare Abbildungen II

2+2=4 Punkte

Betrachten Sie die Vektorräume U und V mit Basen $B_U = \{e_1, e_2\}$ und $B_V = \{f_1, f_2, f_3\}$. Die Dualbasis von B_U sei $B_U^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$, diejenige von B_V sei $B_V^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

a) Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$L : U \to V, u \mapsto (5\vartheta_1(u) - \vartheta_2(u))f_1 - 2\vartheta_1(u)f_2 + 3\vartheta_2(u)f_3 \,.$$

b) Die transponierte Abbildung $L^t : V^* \to U^*$ ist durch $L^t(\phi) = \phi \circ L$ definiert. Verwenden Sie diese Definition, um die Matrixdarstellung von L^t bezüglich B_V^*, B_U^* zu bestimmen.

4. Differential und Kettenregel

1+1+1+1+2=6 Punkte

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}_2; s \mapsto p_0 + s^2 e_x + s^3 e_y$ und $g : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}; p \mapsto \exp(2x(p) - y(p))$. Wir arbeiten mit Standardkoordinaten.

a) Berechnen Sie $(D_p g)(v)$ für $v = v_x e_x + v_y e_y$ mit Hilfe der Definition des Differentials.

b) Folgern Sie daraus Dg.

c) Geben Sie den Funktionsterm von $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

d) Berechnen Sie $(g \circ f)'(s)$ *direkt* mit Hilfe des Funktionsterms.

e) Wiederholen Sie die Rechnung mit Hilfe der Kettenregel für Jacobi-Matrizen.

5. Äußere Ableitung

1+1=2 Punkte

Geben Sie die äußere Ableitung folgender Differentialformen an ($\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten):

$$y^2 z \ , \qquad (xy + z^2 \arctan(e^{xz}))dx \wedge dz \ .$$

6. Exakte 1-Formen

1+2=3 Punkte

a) Geben Sie (im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten) eine Parametrisierung der Verbindungsstrecke γ der Punkte $p_0 - 3e_y$ und $p_0 + e_x$ an.

b) Integrieren Sie die exakte 1-Form $x^2 dx + y^2 dy$ über γ, indem Sie ein Potential erraten.

7. Satz von Stokes

1+2+2=5 Punkte

a) Geben Sie (im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten) eine Parametrisierung einer gegen den Uhrzeigersinn orientierten Kreisscheibe Σ mit Mittelpunkt p_0 und Radius 3 an.

b) Integrieren Sie die 2-Form $(x^2 + y^2)dx \wedge dy$ über Σ.
Hinweis: $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

c) Reproduzieren Sie dieses Ergebnis mit Hilfe des Satzes von Stokes.
Hinweis: $d(-x^2 y dx + x y^2 dy) = (x^2 + y^2) dx \wedge dy$, $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$.

8. Differentialgleichungen

1+2=3 Punkte

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a) $y'(x) - 3x^2 y(x) = 0 \ , \qquad y(0) = 1 \ .$

b) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0 \ , \qquad y(0) = 1 \ , \qquad y'(0) = 0 \ .$

Teil B

Teil B enthält Aufgaben, die etwas näher an den üblichen Übungsaufgaben liegen.
Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein **neues Blatt**.

9. Trägheitsmoment eines Zylindermantels *1+2+2+1+1=7 Punkte*

Wir betrachten einen homogenen Zylindermantel U im $\mathbb{E}_3$ mit Innenradius $R_1 > 0$, Außenradius $R_2 > R_1$ und Länge L. Wir wählen das Koordinatensystem $\{p_0; e_x, e_y, e_z\}$ so, dass die z-Achse die Symmetrieachse des Zylindermantels ist und die x-y-Ebene ihn in zwei gleich große Hälften teilt. Damit können wir die Massendichte wie folgt angeben:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot [dx \wedge dy \wedge dz; \text{rechts}] & \text{wenn } R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2 \text{ und } |z| \leq L/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Geben Sie eine Parametrisierung h des Zylindermantels U an.

b) Berechnen Sie die Gesamtmasse M des Zylindermantels durch Integration von ρ über $[U; \text{rechts}]$.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse mittels des Integrals

$$I_{z-\text{Achse}} = \int\limits_{[U;\text{rechts}]} (x^2 + y^2)\rho \; .$$

d) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines dünnen Zylindermantels. Schreiben Sie hierzu, wenn nicht bereits in c) geschehen, $I_{z-\text{Achse}} = M f(R_1, R_2)$ und berechnen Sie $M \cdot \lim_{R_1 \to R_2} f(R_1, R_2)$.

e) Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit gleicher Masse M und Radius R_2 ist $\tilde{I}_{z-\text{Achse}} = \frac{1}{2} M R_2^2$. Geben Sie eine physikalische Erklärung, warum Ihr Ergebnis für den Zylindermantel größer oder kleiner ist.

10. Freier Fall mit Stokes'scher Reibung *2+1+4=7 Punkte*

Fällt ein Körper, z.B. ein Staubkorn, im homogenen Schwerefeld langsam in Luft, so dominiert im Luftwiderstand die Stokes'sche Reibung, die proportional zur Fallgeschwindigkeit ist.
Obwohl sich die Physik im $\mathbb{E}_3$ abspielt, ist das Problem im Wesentlichen eindimensional. Wir wählen dazu die negative z-Richtung senkrecht nach unten und interessieren uns nur für die z-Komponente der Geschwindigkeit, wir setzen $v \equiv v_z$. Die Reibung sei durch $-\beta v$ gegeben, die Schwerebeschleunigung sei g und die Masse des Körpers m.

a) Begründen Sie physikalisch, dass die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $v(t)$ durch

$$m\dot{v} = -mg - \beta v$$

gegeben ist.

b) Welche Endgeschwindigkeit $v(t = \infty)$ erreicht der Körper? Begründen Sie Ihre Antwort entweder mit einem physikalischen Argument und a) oder erschließen Sie diese aus der Lösung des nächsten Aufgabenteils.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus a) mittels der Methode „Variation der Konstanten" für den Anfangswert $v(t = 0) = v_0$.

11. Ableitung nach der Zeit

2+1+4=7 Punkte

Im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten x, y sind Polarkoordinaten r, ϕ definiert durch

$$x = r\cos\phi\ , \qquad y = r\sin\phi\ .$$

a) Leiten Sie die Beziehungen

$$\hat{e}_r = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y,\ \ \hat{e}_\phi = -\sin\phi e_x + \cos\phi e_y$$

für die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten her.

Sie schlagen ein Physikbuch auf und finden dort bei der Beschreibung der Bahnkurve eines Massenpunkts in ebenen Polarkoordinaten folgende Formeln:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\phi}\hat{e}_\phi \qquad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi\ .$$

b) Erläutern Sie kurz, wie man die „Ableitung von Koordinaten nach der Zeit“, $\dot{r}$ bzw. $\dot{\phi}$, richtig zu interpretieren hat.

c) Zeigen Sie durch eine direkte Rechnung, dass die angegebenen Formeln für $\vec{v}$ und $\vec{a}$ korrekt sind.

12. Variationsrechnung

7 Punkte

In der ersten Prüfung wurde das Differential des Funktionals

$$S : M \to \mathbb{R}; f \mapsto \int_{x_0}^{x_1} L(f(x), f'(x))dx\ ,$$

wobei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto L(y_1, y_2)$ eine differenzierbare Funktion ist, berechnet. Das Ergebnis ist

$$(D_f S)(g) = \int_{x_0}^{x_1} g(x) \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}(f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_2}(f(x), f'(x)) \right) dx\ .$$

M ist hierbei die Menge aller stetig differenzierbaren Funktion $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ mit festen Randwerten $f(x_0) = a\ ,\ f(x_1) = b\,.$ Das notwendige Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums gilt auch hier: Ist $f \in M$ ein lokales Extremum, so gilt

$$\frac{\partial L}{\partial y_1}(f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_2}(f(x), f'(x)) = 0\ . \qquad (1)$$

Im Folgenden werden wir die einfachste Anwendung von (1) betrachten und in der euklidischen Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten finden.

Die Länge des Graphen G_f einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ ist durch

$$l(G_f) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

gegeben.

Finden Sie eine Verbindung extremaler Länge (d.h. in diesem Fall die kürzeste) zwischen den Punkten $P(x_0|a)$ und $Q(x_1|b)$ in der euklidischen Ebene ($x_0 < x_1$).

Hinweis: Wie sieht $L(f(x), f'(x))$ in diesem Fall aus?