Mathematische Methoden der Physik

Prüfung

WS 14/15

Hinweise: Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel. Geben Sie am Ende der Prüfung bitte kein Konzeptpapier mit ab und reichen Sie von jeder Aufgabe nur eine Bearbeitung ein. Es empfiehlt sich, zuerst das Aufgabenblatt komplett durchzulesen.

Beschreiben Sie bitte **keine Rückseiten**.

Teil A

Dieser Teil der Prüfung enthält Aufgaben zu den Grundlagen der Vorlesung. Sie müssen in diesem Teil mindestens **20 Punkte** von 30 möglichen erreichen. Die Aufgaben sind so gestellt, dass *keine* zusätzlichen Komplikationen wie „schwierige“ Integrale und Ableitungen oder umständliche Rechnungen zur Lösung erforderlich sind.

1. Vektorrechnung

1+2+2=5 Punkt(e)

$B = \{e_1, e_2\}$ sei eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

a) Geben Sie an, wie Skalarprodukt und Norm zusammenhängen.

b) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass $B' = \{e'_1, e'_2\}$ mit $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$ ebenfalls eine Orthonormalbasis ist.

c) Bestimmen Sie die Spaltendarstellung von $v = 2e_1 - 5e_2$ bzgl. B' .

2. Dualraum

2 Punkt(e)

Sei V ein reeller Vektorraum. Geben Sie die Definition des Dualraums V^* an.

Hinweis: Dazu gehört auch die Angabe, wie Skalarmultiplikation und Vektoraddition in V^* definiert sind.

3. Lineare Abbildungen

1+2=3 Punkt(e)

Betrachten Sie die Vektorräume U und V mit Basen $B_U = \{e_1, e_2\}$ und $B_V = \{f_1, f_2, f_3\}$. Die Dualbasis von B_U sei $B_U^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$.

a) Geben Sie die Dimension von U und V an.

b) Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$L : U \rightarrow V, u \mapsto (\vartheta_1(u) - \vartheta_2(u))f_1 + 3\vartheta_2(u)f_3.$$

4. Differential und Kettenregel

2+1+1+2=6 Punkt(e)

Wir arbeiten im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten.

Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2; t \mapsto p_0 + te_x + t^2e_y$ und $g : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto \exp(x(p) + y(p))$.

- Berechnen Sie die $D_p g$ mit Hilfe der Definition des Differentials.
- Geben Sie den Funktionsterm von $g \circ f$ an.
- Berechnen Sie $(g \circ f)'$ *direkt* mit Hilfe des Funktionsterms.
- Wiederholen Sie die Rechnung mit Hilfe der Kettenregel. Sie dürfen selbst entscheiden, ob Sie die Kettenregel für das Differential oder für Jacobi-Matrizen verwenden wollen.

5. Äußere Ableitung

1+1+1=3 Punkt(e)

Berechnen Sie (im $\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten) die äußere Ableitung von

$$xy \quad z^2 dx \quad (x + y^2) dx \wedge dz.$$

6. Wegintegrale

1+1+2=4 Punkt(e)

- Geben Sie (im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten) eine Parametrisierung der Verbindungsstrecke γ der Punkte p_0 und $p_0 + 2e_x + e_y$ an.
- Integrieren Sie die 1-Form $xdx + ydy$ über γ mit Hilfe der Definition des Wegintegrals.
- Reproduzieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie ein Potential für $xdx + ydy$ raten.

7. Flächenintegrale

1+2=3 Punkt(e)

- Geben Sie (im $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten) eine Parametrisierung einer rechtshändig orientierten Kreisscheibe Σ mit Mittelpunkt p_0 und Radius 2 an.
- Integrieren Sie die 2-Form $(x^2 + y^2)dx \wedge dy$ über Σ . ($\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.)

8. Satz von Stokes

1 Punkt(e)

Geben Sie den allgemeinen Satz von Stokes (für Differentialformen) an.

9. Differentialgleichungen

1+2=3 Punkt(e)

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

- $y'(x) - 2xy(x) = 0 \quad y(0) = 1$
- $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$

Teil B

Teil B enthält Aufgaben, die etwas näher an den üblichen Übungsaufgaben liegen. Für jede Aufgabe gibt es 7 Punkte, zum Bestehen benötigen Sie in diesem Teil **10 Punkte**.

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe in diesem Teil ein **neues Blatt**.

10. Trägheitsmoment eines Zylinders

1+1+3+2=7 Punkt(e)

Wir betrachten einen homogenen Vollzylinder U im $\mathbb{E}_3$, sein Radius sei R und seine Länge L . Wir wählen das Koordinatensystem $\{p_0; e_x, e_y, e_z\}$ so, dass die z -Achse die Symmetrieachse des Zylinders ist und die x - y -Ebene ihn in zwei gleich große Hälften teilt. Damit können wir die Massendichte wie folgt angeben:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot [dx \wedge dy \wedge dz; \text{rechts}] & \text{wenn } x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } |z| \leq L/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Geben Sie eine Parametrisierung h des Zylinders U an.
- Erläutern Sie kurz, warum für die Modellierung der Dichte ρ eine *ungerade* 3-Form verwendet wird.
- Berechnen Sie die Gesamtmasse des Zylinders durch Integration von ρ über $[U; \text{rechts}]$.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse mittels des Integrals

$$I_{z\text{-Achse}} = \int_{[U; \text{rechts}]} (x^2 + y^2) \rho.$$

11. Parabolisches Koordinatensystem

2+1+2+2=7 Punkt(e)

Analog zu Polarkoordinaten kann man für den zweidimensionalen euklidischen $\mathbb{E}_2$ mit Standardkoordinaten x, y und Ursprung p_0 beispielsweise auch parabolische Koordinaten definieren:

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad y = uv \quad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}_0^+.$$

- Berechnen Sie die Basisvektorfelder ∂_u, ∂_v und zeigen Sie, dass diese in jedem Punkt orthogonal sind.
- Geben Sie die normierten Basisvektorfelder $\hat{e}_u, \hat{e}_v$ an.
- Der euklidische Isomorphismus $\mathcal{I}$ ist definiert durch

$$\mathcal{I} : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle,$$

ferner gilt für die Basis-Einsformen du, dv

$$du(\partial_u) = dv(\partial_v) = 1 \quad du(\partial_v) = dv(\partial_u) = 0.$$

Verwenden Sie diese Information, um $\mathcal{I}(\hat{e}_u)$ und $\mathcal{I}(\hat{e}_v)$ durch du und dv auszudrücken.

- Das Differential einer Funktion $f : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat auch in parabolischen Koordinaten die allgemeine Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv.$$

Verwenden Sie das Ergebnis aus **c**, um einen Ausdruck für $\text{grad} f$ in parabolischen Koordinaten anzugeben.

12. Visualisierung des Formenkalküls

1+1+2+3=7 Punkt(e)

Ein zweidimensionales Quadratgitter K ist eine Parkettierung der Ebene mit Quadraten einer gegebenen Seitenlänge sowie deren Kanten und Ecken. Diese erzeugen als Basiselemente die entsprechenden Vektorräume der k -Ketten $C_k(K)$ ($k = 2, 1, 0$) und sind mit einer inneren Orientierung versehen.

- Beschreiben Sie, wie die Randoperatoren $\partial : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$ und $\partial : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$ auf Basiselemente wirken.
- Zeigen Sie, dass „der Rand des Randes verschwindet“, d.h. dass $\partial \circ \partial = 0$ gilt.
- Das zu K duale Gitter $\tilde{K}$ ist ebenfalls ein Quadratgitter, allerdings mit äußerer Orientierung der Basiselemente. Diskutieren Sie auf Basiselementen die Schnittpaarung, d.h. die diskrete Version des Integrals

$$\int : C^k(\tilde{K}) \times C_k(K) \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie die Differenzialoperatoren $d : C^0(\tilde{K}) \rightarrow C^1(\tilde{K})$ und $d : C^1(\tilde{K}) \rightarrow C^2(\tilde{K})$ aus der Forderung, dass der allgemeine Satz von Stokes gelten soll. Folgern Sie die Regel, dass „zweimal d Null ist“, d.h. $d \circ d = 0$.

13. Funktionalableitung

1+1+3+2=7 Punkt(e)

Die Menge M aller stetig differenzierbaren Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit festen Randwerten $f(0) = a, f(1) = b$ kann als affiner Raum aufgefasst werden. Der Differenzvektorraum V umfasst dann alle stetig differenzierbaren Funktionen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die am Rand verschwinden, $g(0) = g(1) = 0$. Auch in diesem Zusammenhang funktioniert unsere Definition des Differentials.

- Erläutern Sie kurz, warum M im Allgemeinen kein Vektorraum sein kann.

Hinweis: Dazu müssen Sie nicht alle Vektorraumaxiome prüfen. Es genügt zu zeigen, dass eine bekannte Eigenschaft von Vektoren nicht gegeben ist!

- Erläutern Sie kurz, warum die Funktionen in V am Rand verschwinden müssen.

Betrachten Sie das sog. Funktional (d.h. eine Funktion auf M)

$$S : M \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 L(f(x), f'(x)) dx,$$

wobei $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto L(y_1, y_2)$ eine differenzierbare Funktion sei.

- Zeigen Sie durch eine direkte Rechnung

$$(D_f S)(g) = \int_0^1 \left(g(x) \frac{\partial L}{\partial y_1}(f(x), f'(x)) + g'(x) \frac{\partial L}{\partial y_2}(f(x), f'(x)) \right) dx$$

für $f \in M, g \in V$. Sie dürfen hierbei Ableitung und Integration vertauschen.

- Zeigen Sie durch partielle Integration

$$(D_f S)(g) = \int_0^1 g(x) \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}(f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y_2}(f(x), f'(x)) \right) dx.$$

Den geklammerten Ausdruck nennt man Funktionalableitung von S .