

Anhang Berechnung von $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Trick: $\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

⌈ Beweis hierfür: leider kommt man in diesem speziellen Fall entgegen der Behauptung in der Übung nicht mit Lebesgue ans Ziel, sondern muss es „zu Fuß“ abschätzen.

Man benutzt:

Satz: (Stetigkeit des uneigentlichen Integrals)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $E \subseteq \mathbb{C}$, $a, b \in \bar{I}$ und $f: E \times I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) eine stetige Funktion.

Ferner gelte es eine stetige Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $|f(x, t)| \leq g(t)$ für alle $(x, t) \in E \times I$ und $\int_a^b g(t) dt < \infty$. Dann existiert auch die Funktion $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ auf E und ist dort stetig.

$\Rightarrow$ Die Funktion $a \mapsto \int_0^{t_0} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt$ ist im Nullpunkt stetig, da $\left| e^{-at} \frac{\sin t}{t} \right| \leq \underbrace{|e^{-at}|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{\sin t}{t} \right|}_{\leq 1} \leq 1$ auf $[0, t_0]$. Also gilt

$$\left| \int_0^{t_0} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{t_0} \underbrace{e^{-0 \cdot t}}_1 \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

solange nur $0 \leq a \leq \delta$ ist.

Für $0 < u \leq v < \infty$ und $a \geq 0$ gilt

$$\int_u^v e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt \stackrel{\text{p.I.}}{=} - \frac{e^{-at} (\cos t + a \sin t)}{(1+a^2)t} \Big|_u^v - \frac{1}{1+a^2} \int_u^v \frac{e^{-at} (\cos t + a \sin t)}{t^2} dt$$

Man sieht daher, dass $\int_{t_0}^{\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt$ (für t_0 groß genug)

beliebig klein wird, d.h. es existiert ein $t_0 > 0$ zu jedem $\epsilon > 0$

derart, dass $\left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$ ausfällt.

Man hat also

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} (e^{-at} - 1) \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^{t_0} (e^{-at} - 1) \frac{\sin t}{t} dt \right| + \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt \right| + \left| \int_{t_0}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \square \end{aligned}$$

In ähnlicher Art und mit dem Satz über die Differenzierbarkeit des uneigentlichen Integrals zeigt man auch

$$\frac{d}{da} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} (-x) e^{-ax} dx \quad \square$$

Zur Berechnung:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} dx$$

$$\stackrel{\text{gln. Konvergenz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} e^{-ax} x^{2k} dx$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{a^{2k+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} t^{2k} dt}_{= \Gamma(2k+1) = (2k)!} \\ & t := ax \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\frac{1}{a}\right)^{2k+1} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\Gamma(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C$$

$$\arctan 0 = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Zweite Methode: "Feynman-Integration".

$$\text{Betrachte } I(a) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

$$\Rightarrow I'(a) = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx = - \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow I(a) = -\arctan(a) + C$$

$$0 = I(\infty) = -\arctan(\infty) + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I(0) = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$