3 Einfaches zu Differenzialgleichungen

3.1 Lineare Differenzialgleichungen

3.1.1 Struktur des Lösungsraums

Wir betrachten im Folgenden Differenzialgleichungen für Funktionen einer reellen Veränderlichen:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

In diesem Kontext ist eine lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung eine Gleichung der Form

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y(x) + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x) + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \tag{3.2}$$

Wir schreiben abkürzend $\mathcal{L} := \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$. Ein solches Objekt $\mathcal{L}$ nennt man einen Differenzialoperator n-ter Ordnung. Die Differenzialgleichung (DGL) lautet jetzt kurz $\mathcal{L}y = f$. Die Funktion f heißt die Inhomogenität der DGL. Der Differenzialoperator $\mathcal{L}$ ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}y_1 + \mathcal{L}y_2\,, \quad \mathcal{L}(ry) = r\mathcal{L}y \quad (r \in \mathbb{R}). \tag{3.3}$$

Offenbar gilt:

1) $(\mathcal{L}y_1 = 0$ und $\mathcal{L}y_2 = 0) \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 + y_2) = 0.$

2) $(\mathcal{L}y_1 = 0,\ r \in \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{L}(ry_1) = 0$.

Also sind mit y_1 und y_2 auch $(y_1 + y_2)(x) := y_1(x) + y_2(x)$ und $(ry_1)(x) := ry_1(x)$ Lösungen der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$.

Merke: Der Lösungsraum der (homogenen) DGL $\mathcal{L}y = 0$ (also mit $f = 0$) hat die Struktur eines Vektorraumes. □

Hingegen hat der Lösungsraum der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ die Struktur eines affinen Raumes (mit Differenzvektorraum gleich dem Lösungsraum der homogenen DGL), denn aus $\mathcal{L}y_1 = f$ und $\mathcal{L}y_2 = f$ folgt $\mathcal{L}(y_2 - y_1) = 0$.

Merke: Jede (beliebige) Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ lässt sich darstellen als eine spezielle Lösung y_1 dieser Gleichung plus eine Lösung der homogenen DGL.

Beweis. Sei y_1 eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y_1 = f$. Eine beliebige andere Lösung y lässt sich ausdrücken als $y = y_1 + (y - y_1)$, und, wie wir wissen, ist $y - y_1$ Lösung der homogenen DGL.

3.1.2 Homogene lineare DGL 1. Ordnung

Wir behandeln jetzt die Differenzialgleichung

$$y'(x) = a(x)\,y(x) \tag{3.4}$$

mit variablem Koeffizienten $a(x)$, also $\mathcal{L}y = 0$ mit dem Differenzialoperator $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} - a(x)$. Unter der Annahme, dass durch $y(x)$ dividiert werden kann, haben wir

$$a(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{d}{dx} \ln y(x). \tag{3.5}$$

Per Integration folgt

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt} \ln y(t)\, dt = \ln y(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} = \ln y(x) - \ln y(x_0) = \ln \frac{y(x)}{y(x_0)}\,. \tag{3.6}$$

Demnach gilt

$$\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\Big) = \frac{y(x)}{y(x_0)} \tag{3.7}$$

oder

$$y(x) = y(x_0) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\Big). \tag{3.8}$$

Der Lösungsraum ist hier eindimensional; er wird durch die Konstante $y_0 \equiv y(x_0)$ parametrisiert. Wir sehen auch, dass die eingangs gemachte Annahme $y(x) \neq 0$ keine Einschränkung bedeutet.

3.1.3 Variation der Konstanten

Wir wenden uns jetzt der inhomogenen Gleichung $\mathcal{L}y = b$ zu; also

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x). \tag{3.9}$$

Diese löst man durch "Variation der Konstanten", d.h. mittels des Ansatzes

$$y(x) = c(x)\, \mathrm{e}^{A(x)}, \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt. \tag{3.10}$$

Einmal Differenzieren ergibt

$$y' = c'\, \mathrm{e}^{A} + cA'\, \mathrm{e}^{A} = (c' + c\, a)\, \mathrm{e}^{A} \quad \text{oder} \quad y' - ay = c'\, \mathrm{e}^{A}. \tag{3.11}$$

Es folgt $c'\, \mathrm{e}^{A} = b$ oder $c' = \mathrm{e}^{-A}\, b$. Durch Integration dieser Gleichung und Hinzufügen der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir

$$y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{A(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(x)-A(t)}\, b(t)\, dt. \tag{3.12}$$

Bemerkung. Wie man ohne Mühe sieht, hat die Lösung die Form

$$y(x) = h(x) + \int_{\mathbb{R}} G(x, x')\, b(x')\, dx' \tag{3.13}$$

mit $h(x) =$ Lösung der homogenen Gleichung und

$$G(x, x') = \begin{cases} \mathrm{e}^{A(x)-A(x')} & x > x', \\ 0 & x < x'. \end{cases} \tag{3.14}$$

Man nennt $G(x, x')$ die Greenfunktion (vgl. Abschn. 3.1.5) der linearen DGL 1. Ordnung.

3.1.4 Homogene lineare DGL 2. Ordnung: Wronski-Determinante

Die homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten lautet

$$\mathcal{L}\, y = 0, \qquad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x). \tag{3.15}$$

(Ohne großen Verlust an Allgemeinheit haben wir den Koeffizienten der zweiten Ableitung konstant gleich Eins gesetzt.)

Definition. Unter der Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 der homogenen Gleichung $\mathcal{L}\, y = 0$ versteht man die Funktion

$$W_{y_1,y_2}(x) \equiv W(x) := y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x). \quad \Box \tag{3.16}$$

Kurze Rechnung ergibt folgende Differenzialgleichung für die Wronski-Determinante:

$$W' = y_1\, y_2'' - y_2\, y_1'' = -y_1\,(a y_2' + b y_2) + y_2\,(a y_1' + b y_1) = -a\, W. \tag{3.17}$$

Die Lösung hiervon lautet (für irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$W(x) = W(x_0)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}. \tag{3.18}$$

Es folgt, dass $W(x)$ entweder für keinen Wert oder für alle Werte von x verschwindet.

Mitteilung. Die stationäre Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik (für die Bewegung eines Teilchens der Masse m und Energie E auf einer Achse mit Koordinate x und Potenzialfunktion $V(x)$) lautet $\mathcal{L}\,\psi = 0$, wobei

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E - V(x)\big). \tag{3.19}$$

($\hbar$ ist die Plancksche Konstante.) Diese eindimensionale Schrödinger-Gleichung ist der Spezialfall der hier betrachteten Differenzialgleichung für $a(x) \equiv 0$ und $b(x) = 2m\,(E - V(x))/\hbar^2$. In diesem Spezialfall hat die skalierte Wronski-Determinante $\frac{\hbar}{m}(y_1\, y_2' - y_2\, y_1')$ die physikalische Bedeutung des (erhaltenen) Wahrscheinlichkeitsstromes im quantenmechanischen Zustand mit komplexwertiger Wellenfunktion $\psi = \mathrm{Re}(\psi) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\psi) = y_1 + \mathrm{i}\, y_2$.

Satz. Ist die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L}\, y = 0$ ungleich Null, so sind y_1 und y_2 linear unabhängig, d.h. es existiert kein vom Nullpaar verschiedenes Zahlenpaar c_1, c_2 mit der Eigenschaft $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) = 0$ (Nullfunktion).

Beweis. Sei $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) = 0$ mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Differenzieren dieser Gleichung liefert

$$c_1\, y_1'(x) + c_2\, y_2'(x) = 0. \tag{3.20}$$

Durch geschicktes Multiplizieren und Addieren von Gleichungen folgt

$$W = y_1\, y_2' - y_2\, y_1' = 0. \tag{3.21}$$

Die lineare Abhängigkeit von y_1 und y_2 impliziert also $W = 0$. Dieser Schluss ist logisch äquivalent zur Implikation $\big(W \neq 0 \Longrightarrow y_1, y_2 \text{ linear unabhängig}\,\big)$. $\Box$

Definition. Wenn die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L}\, y = 0$ nicht verschwindet, dann heißt das Paar y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL.

Satz. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL $\mathcal{L}\, y = 0$, so lässt sich jede Lösung y derselben als Linearkombination von y_1 und y_2 darstellen.

Beweis. Für eine Lösung y von $\mathcal{L}\, y = 0$ definieren wir zwei Funktionen $x \mapsto c_j(x)$ $(j = 1, 2)$ durch

$$c_j(x) := \frac{y(x)\, y_j'(x) - y_j(x)\, y'(x)}{W(x)} \,. \tag{3.22}$$

Durch Differenzieren von $x \mapsto c_j(x)\, W(x)$ erhalten wir

$$c_j'\, W + c_j\, W' = y\, y_j'' - y_j\, y'' = -a\, (y\, y_j' - y_j\, y') = -aW c_j \,. \tag{3.23}$$

Mit $W' = -aW$ folgt $c_j'\, W = 0$ und somit $c_j(x) \equiv c_j$ (unabhängig von x).

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung $c_j\, W = y\, y_j' - y_j\, y'$ für $j = 1$ mit y_2 und dieselbe Gleichung für $j = 2$ mit y_1 und bilden die Differenz. So entsteht

$$(c_1\, y_2 - c_2\, y_1)\, W = (y\, y_1' - y_1\, y')\, y_2 - (y\, y_2' - y_2\, y')\, y_1 = -y\, W. \tag{3.24}$$

Es folgt $y(x) = c_2\, y_1(x) - c_1\, y_2(x)$ mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2, wie behauptet.

3.1.5 Greenfunktion der linearen DGL 2. Ordnung

Wir betrachten nun die inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$\mathcal{L}\, y = f, \qquad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x). \tag{3.25}$$

Motivation. Sei G ein Operator [also eine lineare Abbildung von Funktionen $x \mapsto f(x)$ zu Funktionen $x \mapsto (Gf)(x)$], der ein Rechtsinverses von $\mathcal{L}$ ist – d.h. in Formeln soll gelten: $\mathcal{L}Gf = f$. Wenn ein solcher Operator G existiert, dann ist $y(x) := (Gf)(x)$ offensichtlich eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$. Nun ist G aber nicht ohne weiteres eindeutig bestimmt, denn mit Gf löst ja auch $(Gf)(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von $\mathcal{L}y = 0$) die gleiche DGL. Um G festzulegen, müssen sog. Randbedingungen gestellt werden.

Vorschlag. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L}\, y = 0$ und $W = y_1 \frac{d}{dx} y_2 - y_2 \frac{d}{dx} y_1$ die zugehörige Wronski-Determinante. Betrachte

$$G(x, x') = \frac{1}{W(x')} \begin{cases} y_2(x) y_1(x') & x \geq x' \,, \\ y_1(x) y_2(x') & x \leq x' \,. \end{cases} \tag{3.26}$$

Man nennt $G(x, x')$ eine Greenfunktion für $\mathcal{L}$.

Fakt. Das Integral

$$y(x) := (Gf)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} G(x, x')\, f(x')\, dx' \tag{3.27}$$

(wenn es konvergiert) ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L}\, y = f$.

Verifikation. Ausgehend von

$$y(x) = y_2(x) \int_{-\infty}^{x} \frac{y_1(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' + y_1(x) \int_{x}^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx'$$

prüfen wir die Lösungseigenschaft nach. Für die erste Ableitung y' erhalten wir

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy_2}{dx}(x) \int_{-\infty}^{x} \frac{y_1(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' + \frac{dy_1}{dx}(x) \int_{x}^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx',$$

und für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= \frac{d^2y_2}{dx^2}(x) \int_{-\infty}^{x} \frac{y_1(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' + \frac{d^2y_1}{dx^2}(x) \int_{x}^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' \\ &+ \frac{1}{W(x)} \left(y_1(x) \frac{dy_2}{dx}(x) - y_2(x) \frac{dy_1}{dx}(x) \right) f(x). \end{aligned}$$

Der Term in der letzten Zeile vereinfacht sich zu $f(x)$. Durch Multiplikation mit den Koeffizienten von $\mathcal{L}$ und Aufsummieren von Gleichungen erhalten wir

$$(\mathcal{L}\, y)(x) = (\mathcal{L}\, y_1)(x) \int_{-\infty}^{x} \frac{y_1(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' + (\mathcal{L}\, y_2)(x) \int_{x}^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')}\, f(x')\, dx' + f(x).$$

Mit $\mathcal{L}\, y_1 = \mathcal{L}\, y_2 = 0$ folgt die Behauptung $\mathcal{L}\, y = f$.

Bemerkung. Der angegebene Ausdruck für $G(x,x')$ taugt dann, wenn die Inhomogenität f nur in einem beschränkten Teil von $\mathbb{R}$ von Null verschieden ist, da für solche f die Existenz des Integrals $\int_{\mathbb{R}} G(x,x')\, f(x')\, dx'$ gesichert ist. Wenn $f(x') = 0$ nur für $x' < x_0$ (für irgendein $x_0 > -\infty$) bekannt ist, dann kann die Form (3.26) zu einem divergenten Integral und somit sinnlosen Ausdruck führen. In diesem Fall ersetzt man (3.26) durch

$$G^+(x,x') = \frac{1}{W(x')} \begin{cases} y_2(x)y_1(x') - y_1(x)y_2(x') & x \geq x'\,, \\ 0 & x \leq x'\,. \end{cases} \tag{3.28}$$

Das Integral $y^+(x) = \int_{\mathbb{R}} G^+(x,x')\, f(x')\, dx'$ erstreckt sich dann nur über den endlichen Bereich $x_0 \leq x' \leq x$. Auch y^+ ist eine spezielle Lösung von $\mathcal{L}y = f$. Um das schnell zu verifizieren, berechnen wir die Differenz

$$G(x,x') - G^+(x,x') = y_1(x)y_2(x')/W(x') \tag{3.29}$$

und bemerken, dass

$$y(x) - y^+(x) = (Gf - G^+f)(x) = y_1(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x')\, dx' \tag{3.30}$$

eine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}(y - y^+) = 0$ ist. Man sieht auch leicht ein, dass der Ausdruck (3.28) für $G^+(x,x')$ nicht von der Wahl des Fundamentalsystems abhängt.

Die skizzierte Situation liegt u.a. vor, wenn x wie im nächsten Beispiel die physikalische Bedeutung von Zeit hat und die treibende Kraft f erst zu einer Anfangszeit x_0 einsetzt.

Beispiel. Wir betrachten den getriebenen und gedämpften harmonischen Oszillator,

$$\mathcal{L}\, y = f, \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b \qquad (x \equiv t), \tag{3.31}$$

im überdämpften Bereich, d.h. für Parameterwerte $0 < b < a/2$. Ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Lösungen der homogenen Gleichung ist

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_+ t}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_- t}, \quad \lambda_\pm = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}\,. \tag{3.32}$$

Man beachte $\lambda_\pm \in \mathbb{R}$ und $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Für die entsprechende Wronski-Determinante ergibt sich

$$W(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - y_2(t)\dot{y}_1(t) = (\lambda_- - \lambda_+)\,\mathrm{e}^{(\lambda_- + \lambda_+)t}, \tag{3.33}$$

und die Greenfunktion G^+ ist

$$G^+(t,t') = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_+(t-t')} - \mathrm{e}^{\lambda_-(t-t')}}{\lambda_+ - \lambda_-} \tag{3.34}$$

für $t \geq t'$ und $G^+(t,t') = 0$ sonst. Wir haben somit die folgende spezielle Lösung:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_+(t-t')} - \mathrm{e}^{\lambda_-(t-t')}}{\lambda_+ - \lambda_-}\, f(t')\, dt', \tag{3.35}$$

falls $f(t') = 0$ für $t' \leq t_0$. Wenn wir auch noch als Anfangsbedingung verlangen, dass der Oszillator aus der Ruhe heraus angetrieben wird (also $y(t_0) = 0$), dann ist (3.35) die eindeutige Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ mit der gestellten Anfangsbedingung. Andernfalls (also für $y(t_0) \neq 0$) ist die geeignete Lösung der homogenen Gleichung hinzuzufügen.

3.2 Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Wir verlassen das Thema der linearen Differenzialgleichungen und wenden uns einem ausgewählten Typ von nichtlinearer Differenzialgleichung zu:

$$y'(x) = f(x)\, g(y). \tag{3.36}$$

Üblicherweise geht man hier per "Eselsbrücke" vor. Man schreibt $y' = \frac{dy}{dx}$ und verfährt hiermit so, als wäre $\frac{dy}{dx}$ ein Bruch von Zahlen dx und dy: Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$ multipliziert mit $\frac{dx}{g(y)}$ ergibt $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$. (Der Sinn dieser Gleichung bleibt leider im Dunkeln, solange Differenzialformen unbekannt sind.) Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gibt Integration

$$G(y(x)) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt =: F(x). \tag{3.37}$$

Diese Gleichung macht wieder für jedermann Sinn, auch ohne Differenzialformen: sie bestimmt y (unter geeigneten Voraussetzungen) als Funktion von x durch Auflösen von $G(y(x)) = F(x)$.

Beispiel 1. Wir betrachten die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} = -V'(x) \tag{3.38}$$

für eine potenzielle Energie V. Der hieraus resultierende Energiesatz

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + V(x)\right) \tag{3.39}$$

liefert

$$\frac{m}{2}\,\dot{x}^2 + V(x) = E = \text{const.} \tag{3.40}$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit ergibt

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}. \tag{3.41}$$

Das ist eine Differenzialgleichung $y'(x) = f(x)g(y)$ mit getrennten Variablen, wenn wir die folgenden Umbenennungen vornehmen:

$$y \to x \quad \text{und} \quad x \to t \quad \text{und} \quad y' \to \dot{x} \tag{3.42}$$

und die spezielle Wahl $f(t) \equiv 1$ treffen.

Sei nun $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)} > 0$. Dann gilt per Eselsbrücke

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)} &\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x)\big)}} = dt \\ \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - V(x')\big)}} &= \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \quad \big(\text{mit } x_0 = x(t_0)\big). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Man erhält nun die Lösung des Problems, indem man das Integral auf der linken Seite ermittelt und den resultierenden Ausdruck nach $x(t)$ auflöst. Dieser letzte Schritt wird im nachfolgenden Beispiel explizit ausgeführt.

Beispiel 2. Harmonischer Oszillator: $V(x) = m\,\omega^2 x^2/2$. Wir setzen $2E = mv_{\text{max}}^2$ und $v_{\text{max}} = \omega x_{\text{max}}$, wodurch v_{max} und x_{max} als die maximale Geschwindigkeit bzw. Auslenkung des Oszillators eingeführt werden. Sei nun $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$. Dann ergibt sich

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{v_{\text{max}}^2 - \omega^2 x'^2}} = \frac{1}{\omega}\int_0^{x/x_{\text{max}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\,, \tag{3.44}$$

wobei die Substitution $x = \xi x_{\text{max}}$ verwendet wurde. Nun gilt $(1-\xi^2)^{-1/2}\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\,(\arcsin\xi)$.

Beweis. Zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g'\big(f(x)\big)f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$. Setze nun $g = \sin$, $f = \arcsin$ (Umkehrfunktion des Sinus). Es folgt $g' = \cos = \sqrt{1-\sin^2}$ und somit $g'\big(f(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$, woraus sich schließlich

$$f'(x) = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.45}$$

ergibt. □

Nun weiter im Beispiel 2:

$$\omega t = \int_0^{x/x_{\text{max}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin(\xi)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x/x_{\text{max}}} = \arcsin(x/x_{\text{max}}), \tag{3.46}$$

also $x(t) = x_{\text{max}}\sin(\omega t)$.

3.2.1 Zurückziehen von Formen

Definition (Zurückziehen einer Funktion). Gegeben sei eine Funktion $f: N \to \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\psi: M \to N$. Dann definiert man mittels ψ eine Funktion $\psi^* f: M \to \mathbb{R}$ durch

$$(\psi^* f)(p) := f\big(\psi(p)\big). \tag{3.47}$$

Man nennt diese Operation $f \mapsto \psi^* f$ das *Zurückziehen* der Funktion f von N nach M (mittels der Abbildung $\psi: M \to N$).

Definition. In ähnlicher Weise definiert man die Operation des Zurückziehens von Differenzialformen. Sei β eine 1-Form auf N, und sei die Abbildung $\psi: M \to N$ jetzt differenzierbar. Dann erklärt man die 1-Form $\psi^*\beta$ auf M durch

$$(\psi^*\beta)_p(v) := \beta_{\psi(p)}\big((D_p\psi)(v)\big). \tag{3.48}$$

Hierbei ist $D_p\psi$ das Differenzial der Abbildung $\psi: M \to N$ im Punkt p. Analog definiert man den Rückzug $\psi^*\omega$ einer k-Form ω $(k > 1)$ durch

$$(\psi^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) := \omega_{\psi(p)}\big((D_p\psi)(v_1), \ldots, (D_p\psi)(v_k)\big)\ . \tag{3.49}$$

Mitteilung. Ohne Mühe zeigt man (s.u.), dass ψ^* mit dem äußeren Produkt verträglich ist:

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^*\alpha) \wedge (\psi^*\beta). \tag{3.50}$$

Satz (Transformationssatz, Substitutionsregel): Gegeben seien eine k-Form ω auf N, eine k-dimensionale Fläche c in M und eine differenzierbare Abbildung $\psi: M \to N$. Dann gilt

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^*\omega. \tag{3.51}$$

Bemerkung. Für den Spezialfall $M = N = \mathbb{R}$, $c = [a, b]$ und $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend erhält man die bekannte Substitutionsregel:

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f\big(\psi(x)\big)\, \psi'(x)\, dx. \tag{3.52}$$

Hierzu setzen wir $\omega = f\,\mathrm{d}y$. Dann ist

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y)\, dy\,, \tag{3.53}$$

und die Berechnung von $\psi^*\omega$ ergibt

$$(\psi^*\omega)_p(1) = \psi^*\big(f\,\mathrm{d}y\big)_p(1) = f\big(\psi(p)\big)(\mathrm{d}y)_{\psi(p)}(\psi'(p)\cdot 1) = f\big(\psi(p)\big)\psi'(p), \tag{3.54}$$

also

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y)\, dy = \int_{\psi(c)} \omega \overset{\text{Satz}}{=} \int_c \psi^*\omega = \int_a^b f\big(\psi(x)\big)\, \psi'(x)\, dx. \tag{3.55}$$

3.2.2 Begründung der Eselsbrücke von Abschnitt 3.2

Satz: Die Operationen der äußeren Ableitung und des Zurückziehens von Formen vertauschen. Insbesondere gilt für eine Funktion f und eine differenzierbare Abbildung ψ die Gleichheit

$$\psi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\,(\psi^* f)\,. \tag{3.56}$$

Beweis. Wir verifizieren die Aussage für den explizit angegebenen Fall. Auswertung der linken Seite auf einem Vektor v im Punkt p ergibt (gemäß der Definition der Operation des Zurückziehens der 1-Form $\mathrm{d}f$ mittels ψ):

$$\big(\psi^*(\mathrm{d}f)\big)_p(v) = (\mathrm{d}f)_{\psi(p)}\big((D_p\,\psi)(v)\big). \tag{3.57}$$

Auf der rechten Seite erhalten wir unter Verwendung der Kettenregel der Differenzialrechnung

$$\big(\mathrm{d}\,(\psi^* f)\big)_p(v) = \big(\mathrm{d}\,(f\circ\psi)\big)_p(v) = \big((\mathrm{d}f)_{\psi(p)}\circ(D_p\,\psi)\big)(v). \tag{3.58}$$

Das ist wegen der Assoziativität der Hineinanderausführung von Abbildungen das gleiche Ergebnis wie auf der linken Seite. □

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns der Begründung der Eselsbrücke zu. Die Differenzialgleichung $y' = f(x)\,g(y)$ bedeutet im Klartext, dass wir eine (Lösungs-)Funktion $x\mapsto\psi(x)$ mit der Eigenschaft $\psi'(x) = f(x)\,g\big(\psi(x)\big)$ suchen. Äquivalent hierzu (für $g(\psi(x))\neq 0$) ist

$$\frac{\psi'(x)}{g\big(\psi(x)\big)} = f(x). \tag{3.59}$$

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir auf $N=\mathbb{R}$ die 1-Form $\beta = \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ und auf $M=\mathbb{R}$ die 1-Form $\alpha = f(x)\,\mathrm{d}x$. Gesucht ist dann eine Abbildung $\psi:\ M\to N$ mit der Eigenschaft $\psi^*\beta=\alpha$; wegen $\psi^*\beta = (1/(g\circ\psi))\,\mathrm{d}\psi$ löst eine solche Abbildung ψ unsere Gleichung.

Nun sei $\alpha=\mathrm{d}F$ und $\beta=\mathrm{d}G$, also $F'=f$ und $G'=1/g$. Dann folgt aus $\psi^*\beta=\alpha$

$$\mathrm{d}\,(\psi^*G) = \psi^*(\mathrm{d}G) = \psi^*\beta = \alpha = \mathrm{d}F. \tag{3.60}$$

Nach Integration von $\mathrm{d}\,(\psi^*G)=\mathrm{d}F$ haben wir

$$G\circ\psi = \psi^*G = F + c_0 \tag{3.61}$$

mit einer Integrationskonstanten $c_0\in\mathbb{R}$. Falls G die Umkehrfunktion G^{-1} hat, folgt $\psi = G^{-1}\circ(F+c_0)$. Das ist die behauptete Lösung für $y=\psi(x)$ in der durch Eselsbrücke erhaltenen Form.

Zum Abschluss verifizieren wir die erhaltene Regel ohne Verwendung des Zurückziehens von Differenzialformen. Dazu differenzieren wir $\psi(x) = G^{-1}(F(x)+c_0)$ mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und erhalten

$$\psi'(x) = \frac{F'(x)}{G'\circ G^{-1}\big(F(x)+c_0\big)} = f(x)\,g(\psi(x)). \tag{3.62}$$

ψ erfüllt also wie verlangt die Differenzialgleichung $\psi'(x) = f(x)\,g(\psi(x))$.