

## 2.7.2 Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation ist ein Differenzialoperator, den es nur im  $E_3$  gibt. Sie überführt Vektorfelder in Vektorfelder und zwar auf die folgende Weise:

$$\text{rot} : \text{Vektorfeld} \xrightarrow{\mathcal{I}_1} \text{1-Form} \xrightarrow{d} \text{2-Form} \xrightarrow{\mathcal{I}_2^{-1}} \text{Vektorfeld}. \quad (2.80)$$

Wir wandeln also das Vektorfeld  $v$  in die 1-Form  $\mathcal{I}_1(v)$  um, wenden dann die äußere Ableitung  $d$  an, und konvertieren schließlich  $d\mathcal{I}_1(v)$  in ein Vektorfeld mittels  $\mathcal{I}_2^{-1}$ . In Kurzform:

$$\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1. \quad (2.81)$$

Aus dieser Definition folgt für die Rotation in kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  die Formel

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \text{rot}(v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d)(v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &= \mathcal{I}_2^{-1} \left( \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \right) \\ &= \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \partial_z + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \partial_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \partial_y. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.** Die äußere Ableitung wirkt in allen Koordinatensystemen gleich. Die Formel für die Rotation gilt hingegen nur für kartesische Koordinaten! (In nicht-kartesischen Koordinaten ist die Wirkung von  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  komplizierter.)

**Bemerkung 2.** Genau gesagt bildet die Rotation polare und axiale Vektorfelder auf axiale bzw. polare Vektorfelder ab. Der Wechsel im Transformationsverhalten rührt daher, dass der Isomorphismus  $\mathcal{I}_2$  das Spatprodukt (und somit die Rechte-Hand-Regel) benützt.  $\square$

Aus der Regel  $(d \circ d) f = 0$  folgt mit  $\text{grad} = \mathcal{I}_1^{-1} \circ d$  und  $\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1$  die Regel

$$\text{rot grad } f = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1) \circ (\mathcal{I}_1^{-1} \circ d) f = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ d) f = 0. \quad (2.82)$$

**Rotation in Zylinderkoordinaten.** In Zylinderkoordinaten  $\rho, \varphi, z$  sei ein Vektorfeld

$$\vec{A} = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\varphi \hat{e}_\varphi + A_z \hat{e}_z$$

gegeben. Wir berechnen  $\text{rot} \vec{A}$ . Im ersten Schritt ermitteln wir die entsprechende 1-Form:

$$\mathcal{I}_1(\vec{A}) = A_\rho d\rho + A_\varphi \rho d\varphi + A_z dz.$$

Im zweiten Schritt bilden wir die äußere Ableitung:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) &= \left( \frac{\partial}{\partial \rho}(A_\varphi \rho) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\rho \right) d\rho \wedge d\varphi \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} A_z - \frac{\partial}{\partial z}(A_\varphi \rho) \right) d\varphi \wedge dz + \left( \frac{\partial}{\partial z} A_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} A_z \right) dz \wedge d\rho. \end{aligned}$$

Im dritten Schritt wenden wir  $\mathcal{I}_2^{-1}$  an:

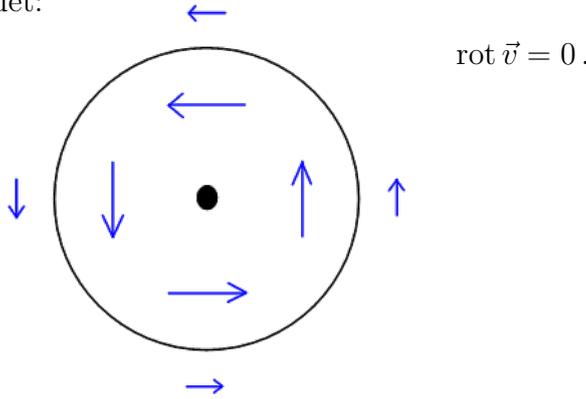
$$\text{rot} \vec{A} = \mathcal{I}_2^{-1} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z$$

$$+ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi.$$

**Beispiel.** Es sei  $\vec{A} \equiv \vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit einer suprafluiden Quantenflüssigkeit (z.B.  $^4\text{He}$  bei Temperaturen  $T < 2\text{K}$ ) mit einem Wirbel längs der  $z$ -Achse:

$$\vec{v} = \frac{\kappa}{\rho} \hat{e}_\varphi.$$

( $\kappa$  ist ein dimensionsbehafteter Parameter.) Die Supraflüssigkeit zirkuliert hier also um die  $z$ -Achse, und die Strömungsgeschwindigkeit fällt wie der inverse Abstand von der  $z$ -Achse ab. Wir haben  $v_\rho = v_z = 0$  und  $v_\varphi = 1/\rho$ . Mit der obigen Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten sieht man, dass  $\text{rot } \vec{v}$  (die sogenannte Vortizität der Quantenflüssigkeit) außerhalb der  $z$ -Achse verschwindet:



**Rotation in Kugelkoordinaten.** Wir berechnen den Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  in Kugelkoordinaten  $r, \theta, \phi$ :

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_\phi \hat{e}_\phi.$$

Erster Schritt:

$$\mathcal{I}_1(\vec{A}) = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\phi r \sin \theta d\phi.$$

Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) &= \left( \frac{\partial}{\partial r}(A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) dr \wedge d\theta \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\theta r) \right) d\theta \wedge d\phi + \left( \frac{\partial}{\partial \phi} A_r - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r \sin \theta) \right) d\phi \wedge dr. \end{aligned}$$

Dritter Schritt:

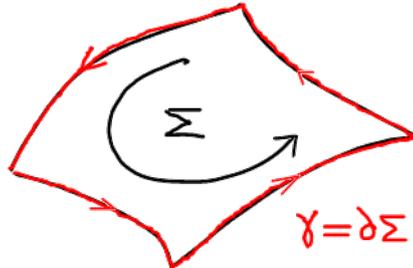
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \mathcal{I}_2^{-1} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \right) \hat{e}_\theta. \end{aligned}$$

Demnach haben wir

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} A_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}, \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r}, \\ (\text{rot } \vec{A})_\phi &= \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

### 2.7.3 Satz von Stokes

In einem affinen Raum  $(X, V, +)$  sei  $\omega : X \rightarrow V^*$  eine differenzierbare 1-Form und  $\Sigma \subset X$  eine orientierte Fläche. Die Fläche  $\Sigma$  wird durch eine Linie berandet, die wir mit  $\gamma \equiv \partial\Sigma$  bezeichnen. Wir nennen die Operation der Randbildung,  $\partial : \text{Fläche} \rightarrow \text{Randlinie}$ , den **Randoperator**. Das nächste Bild illustriert, wie der Randoperator aus der Orientierung der Fläche  $\Sigma$  eine Orientierung der Randlinie  $\gamma = \partial\Sigma$  (also einen Durchlaufsinne von  $\gamma$ ) bestimmt.



#### Satz von Stokes:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega. \quad (2.83)$$

**Korollar.** Sei  $X = E_3$ ,  $V = \mathbb{R}^3$ . Für ein Vektorfeld  $\vec{v}$  auf  $E_3$  sei  $\omega := \mathcal{I}_1(\vec{v})$  die zugeordnete 1-Form. Mit der Formel  $\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1$  folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d^2\vec{n} &= \int_{\Sigma} (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1)(\vec{v}) \cdot d^2\vec{n} \\ &= \int_{\Sigma} \mathcal{I}_2^{-1}(d\omega) \cdot d^2\vec{n} = \int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma} \mathcal{I}_1(\vec{v}) = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}, \end{aligned}$$

d.h. das Integral der Rotation von  $\vec{v}$  über die Fläche  $\Sigma$  ist gleich dem Wegintegral von  $\vec{v}$  längs der geschlossenen Randkurve  $\partial\Sigma = \gamma$ .

**Bemerkung.** In die Formulierung des Integralsatzes

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Satz von Stokes für Vektorfelder}) \quad (2.84)$$

geht an mehreren Stellen Längen- und Winkelmessung ein. Allerdings ist dies ein Fall von **“Viel Lärm um Nichts”!** Die fundamentale Gleichheit  $\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega$  zeigt, dass die Aussage des Satzes im Grunde von der Metrik (d.h. Längen- und Winkelmessung) komplett unabhängig ist.

**Beispiel.** Die elektrische Feldstärke  $E$  ist eine (im allgemeinen nicht-exakte) 1-Form. Das Wegintegral  $\int_{\gamma} E$  von  $E$  längs einer geschlossenen Kurve  $\gamma$  heißt die elektrische **Ringspannung** längs  $\gamma$ . Das Faraday’sche **Induktionsgesetz** besagt

$$dE = -\dot{B}, \quad (2.85)$$

wobei  $\dot{B}$  die Zeitableitung der magnetischen Feldstärke  $B$  bezeichnet. Durch Integration über eine Fläche  $\Sigma$  mit Rand  $\partial\Sigma = \gamma$  erhält man mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma} E = \int_{\Sigma} dE = - \int_{\Sigma} \dot{B} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} B. \quad (2.86)$$

Die elektrische Ringspannung  $\int_{\gamma} E$  längs  $\gamma = \partial\Sigma$  ist also gleich dem Negativen der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses  $\int_{\Sigma} B$  durch  $\Sigma$ . Das Induktionsgesetz lässt sich auch in der Sprache der **Vektorfelder**  $\vec{E} := \mathcal{I}_1^{-1}(E)$  und  $\vec{B} = \mathcal{I}_2^{-1}(B)$  ausdrücken. Es lautet dann

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(differenzielle Form),} \\ \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{n} && \text{(Integralform).} \end{aligned}$$

**Interpretation.** Die Vektorfeld-Version des Satzes von Stokes im  $E_3$  gestattet eine Deutung der Rotation. Hierzu betrachten wir z.B. eine zur  $xy$ -Ebene parallele Kreisscheibe  $D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$  mit Mittelpunkt  $p \in E_3$  und Radius  $\varepsilon > 0$ . Für ein langsam veränderliches Vektorfeld  $\vec{v}$ , dessen Rotation  $\vec{u} := \operatorname{rot} \vec{v}$  auf  $D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$  annähernd konstant ist, haben wir näherungsweise

$$\int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{u} \cdot d^2\vec{n} \approx u_z(p) \int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \partial_z \cdot d^2\vec{n} = \pi\varepsilon^2 u_z(p).$$

Ist  $S_{p,\varepsilon}^{(xy)} := \partial D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$  die die Kreisscheibe berandende Kreislinie, so gilt nach Stokes  $\int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{S_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ . Damit können wir die Rotation als **Grenzwert** ausdrücken:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_z(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{S_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{v} \cdot d\vec{r}. \quad (2.87)$$

Anstelle der Familie von Kreislinien  $S_{p,\varepsilon}^{(xy)}$  können wir genauso gut jede andere Familie von Flächen benutzen, die zur  $xy$ -Ebene parallel sind und gegen den Punkt  $p$  schrumpfen. Hierzu ist lediglich die Kreisfläche  $\pi\varepsilon^2$  durch den gegen Null konvergierenden Flächeninhalt der Familie zu ersetzen. Außerdem sollte klar sein, wie man die Prozedur zu adaptieren hat, um zu entsprechenden Ausdrücken für die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von  $\operatorname{rot} \vec{v}$  zu gelangen.

**Mitteilung.** Jedes differenzierbare Vektorfeld  $v : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  hat eine eindeutige Zerlegung der Form

$$v = \operatorname{grad} f + \operatorname{rot} u. \quad (2.88)$$

(Natürlich ist die Funktion  $f$  nur bis auf Konstanten und das Vektorfeld  $u$  nur bis auf Gradienten eindeutig.) Der erste Summand dieser sogenannten **Hodge-Zerlegung** heißt der **Gradientenanteil** von  $v$ , der zweite der **Wirbelanteil** von  $v$ . Wegen  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$  oder  $\oint \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} = 0$  (Hauptsatz!) misst die Rotation genau den Wirbelanteil des Vektorfeldes.

**Hinweis.** Um eine gute Intuition für den Differenzialoperator der Rotation zu entwickeln, bedarf es einer gewissen Übung. Z.B. hatten wir im Beispiel von Abschnitt 2.7.2 das außerhalb der  $z$ -Achse erklärte Vektorfeld

$$v = \frac{x \partial_y - y \partial_x}{x^2 + y^2} \quad (2.89)$$

betrachtet (wir verwenden wieder kartesische Koordinaten  $x, y, z$ ), dessen Rotation verschwindet, obwohl es zeichnerisch wie ein Wirbelfeld aussieht. (Die Wirbel verstecken sich hier gewissermaßen auf der  $z$ -Achse  $x = y = 0$ .) Leichter ist es, ein intuitives Verständnis der äußeren Ableitung zu entwickeln; siehe dazu den späteren Abschnitt 2.9.2.

### 2.7.4 Beweis des Satzes von Stokes

Wir arbeiten wieder in einem affinen Raum  $(X, V, +)$  und beginnen mit zwei **Vorbereitungen**. Zum ersten benötigen wir eine koordinatenfreie Darstellung der äußeren Ableitung. Für  $\omega = \sum f_i dx_i$  definierten wir  $d\omega = \sum df_i \wedge dx_i$  (siehe Abschnitt 2.7.1). Um die Koordinaten  $x_i$  aus dieser Definition zu beseitigen, machen wir die folgende Rechnung:

$$(d\omega)_p(u, v) = \left( \sum_i df_i \wedge dx_i \right)_p(u, v) = \sum_i \left( (df_i)_p(u) (dx_i)_p(v) - (df_i)_p(v) (dx_i)_p(u) \right).$$

Jetzt verwenden wir die Definition von  $df_i$  und die Konstanz von  $(dx_i)_p = \vartheta_i = (dx_i)_{p+tv}$ :

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(u, v) &= \sum_i \frac{d}{dt} \left( f_i(p+tu) (dx_i)_{p+tu}(v) - f_i(p+tv) (dx_i)_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \omega_{p+tu}(v) - \omega_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\frac{d}{dt} \omega_{p+tv} \Big|_{t=0} = (D_p \omega)(v), \quad (2.90)$$

wobei  $D_p \omega$  das Differenzial (siehe Abschnitt 2.1) der Abbildung  $\omega : X \rightarrow V^*$  im Punkt  $p$  ist. Somit erhält man für die äußere Ableitung die **Formel**

$$(d\omega)_p(u, v) = ((D_p \omega)(u))(v) - ((D_p \omega)(v))(u). \quad (2.91)$$

Die äußere Ableitung auf 1-Formen ist also eine anti-symmetrisierte Version des Differenzials.

Wir kommen zur **zweiten Vorbereitung**. Sei dazu  $\gamma$  das Geradenstück zwischen dem Anfangspunkt  $p$  und dem Endpunkt  $q$ , also  $\gamma(t) = p + t(q-p)$  mit  $0 \leq t \leq 1$ . Dann haben wir für das Wegintegral der 1-Form  $\alpha$  längs  $\gamma$  den Ausdruck

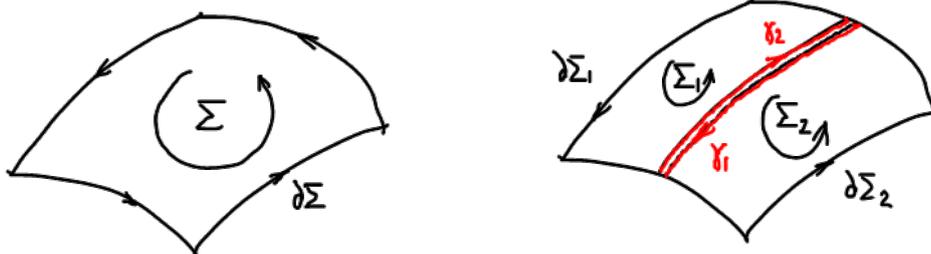
$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 \alpha_{p+t(q-p)}(q-p) dt. \quad (2.92)$$

Weiter sei  $\Delta$  das orientierte Dreieck mit den Eckpunkten  $p, q, r$ , in dieser Reihenfolge. Wählen wir für  $\Delta$  die Parametrisierung  $\sigma(s, t) = p + s(q-p) + t(r-p)$  (mit  $0 \leq s+t \leq 1$ ), so ergibt sich für das Flächenintegral der 2-Form  $\beta$  über  $\Delta$  der Ausdruck

$$\int_\Delta \beta = \int_0^1 \left( \int_0^{1-s} \beta_{p+s(q-p)+t(r-p)}(q-p, r-p) dt \right) ds. \quad (2.93)$$



Wir beginnen jetzt mit dem **Beweis** des Satzes von Stokes. Zur Vereinfachung machen wir eine Reduktion: wir teilen die Fläche  $\Sigma$  in zwei Hälften,  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ :



Es gilt dann  $\int_\Sigma d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega$  und  $\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega + \int_{\partial\Sigma_2} \omega$ . In die zweite Beziehung geht ein, dass die Beiträge von dem durch Teilung entstandenen zusätzlichen Rand sich genau auslöschen:

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega. \quad (2.94)$$

Man sieht jetzt, dass der Satz von Stokes für die Fläche  $\Sigma$  gilt, wenn er für beide Teilflächen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  gilt. Durch Iteration der Prozedur des Teilens gelangt man zu immer kleineren Flächen. Es reicht deshalb letztendlich aus, den Satz von Stokes für “infinitesimale” Flächen zu zeigen.

Sei also  $\Sigma$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $p, p + \varepsilon u, p + \varepsilon v$  (und  $\varepsilon$  klein).



Wir berechnen zunächst das **Wegintegral** von  $\omega$  längs des Randes  $\partial\Sigma$  :

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_0^\varepsilon \left( \omega_{p+\varepsilon u-tu}(u) + \omega_{p+\varepsilon v-tv}(-v) + \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v-u) \right) dt.$$

Hierbei benutzen wir die Relation  $\int_0^\varepsilon f(t) dt = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon - t) dt$ . Jetzt verwenden wir die Linearität  $\lambda(v-u) = \lambda(v) - \lambda(u)$  und fassen die Terme geeignet zusammen:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_0^\varepsilon \left( (\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu})(u) + (\omega_{p+\varepsilon v-tv+tu} - \omega_{p+\varepsilon v-tv})(v) \right) dt.$$

Der dritte Term stammt von  $\int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon v-tv+tu}(v) dt = \int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v) dt$ . Die auftretenden Differenzen lassen sich in erster Näherung (für kleine  $\varepsilon$ ) durch die Differenziale der als Abbildung  $\omega : X \rightarrow V^*$  aufgefassten 1-Form  $\omega$  ersetzen:

$$\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu} \approx -(D_{p+\varepsilon u-tu} \omega)(tv) \approx -(D_p \omega)(tv),$$

und analog für die zweite Differenz. Es folgt

$$\int_{\partial\Sigma} \omega \approx \left( \int_0^\varepsilon t dt \right) \left( -((D_p \omega)(v))(u) + ((D_p \omega)(u))(v) \right) = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v).$$

Mit der gleichen Genauigkeit berechnen wir auch das **Flächenintegral**:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_0^\varepsilon \left( \int_0^{\varepsilon-s} (d\omega)_{p+su+tv}(u, v) \right) ds \approx (d\omega)_p(u, v) \int_0^\varepsilon \left( \int_0^{\varepsilon-s} dt \right) ds = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v).$$

In erster Näherung bekommen wir also das gleiche Ergebnis.

Die bei den Näherungen gemachten Fehler sind für differenzierbares  $\omega$  hinreichend klein, um den gewünschten Schluss (nämlich die Gültigkeit des Satzes von Stokes) ziehen zu können.  $\square$

**Mitteilung.** Der Satz von Stokes lässt sich auch direkt exakt (d.h. ohne Näherungen im Integral zu machen) beweisen, indem man Wegintegral und Flächenintegral parametrisiert und Ketten- und Produktregel geschickt ausnützt. Ein hilfreicher Begriff ist dabei die Operation des Zurückziehens (engl. “pullback”) von Differentialformen, der uns hier aber noch nicht zur Verfügung steht.

## 2.8 Divergenz

Nachdem wir die Differentialoperatoren des Gradienten und der Rotation kennengelernt haben, verbleibt uns die Aufgabe, den Differentialoperator der Divergenz einzuführen. Wir werden dies in einer Weise tun, die auch gleich die passenden Integranden für Volumenintegrale, nämlich 3-Formen, zur Verfügung stellt.

### 2.8.1 Volumenintegral einer 3-Form

Wir erinnern daran (Abschnitt 1.15), dass  $\text{Alt}^3(V)$  den Vektorraum der alternierenden 3-linearen Formen auf  $V$  bezeichnet.

**Definition.** Eine 3-Form  $\omega$  auf einem affinen Raum  $(X, V, +)$  ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : X \rightarrow \text{Alt}^3(V), \quad (2.95)$$

also eine räumlich veränderliche alternierende 3-lineare Form.

**Definition.** Sei  $U \subset X$  ein dreidimensionales Gebiet. Eine Orientierung von  $U$  ist eine (stetige) Regel, die für jeden Punkt  $p \in U$  zu entscheiden gestattet, ob ein Tripel von linear unabhängigen und zu  $U$  in  $p$  tangentialen Vektoren  $u, v, w$  ein positives ( $\cong$  "rechtshändiges") oder negatives ( $\cong$  "linkshändiges") System bildet. Rechnerisch festlegen lässt sich die Orientierung durch eine stetige, nirgendwo verschwindende 3-Form  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \Omega_p(u, v, w) > 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ positives System,} \\ \Omega_p(u, v, w) < 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ negatives System.} \end{aligned}$$

**Definition.** Das Integral  $\int_U \omega$  der 3-Form  $\omega$  über ein orientiertes dreidimensionales Quadergebiet  $U \subset X$  wird folgendermaßen erklärt. Sei

$$h : [0, 1]^3 \rightarrow X, \quad (r, s, t) \mapsto h(r, s, t), \quad (2.96)$$

eine orientierungstreue Parametrisierung von  $U$ , d.h. die Tangentialvektoren  $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$  bilden in jedem Punkt von  $U$  ein positives System. Dann definiert man

$$\int_U \omega = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 \omega_{h(r,s,t)} \left( \frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) \right) dt \right) ds \right) dr. \quad (2.97)$$

**Mitteilung.** Auch diese Definition ist reparametrisierungsinvariant.

**Beispiel.** Sei  $X = E_3$  der dreidimensionale Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten  $x, y, z$ . Wir wollen die 3-Form  $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$  über die (rechtshändig orientierte) Kugel  $K$  mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Koordinatenursprung  $o$  integrieren. Dazu wählen wir die Parametrisierung

$$h(r, s, t) = o + Rr \cos(\pi s) e_z + Rr \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y)$$

und berechnen die Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t) &= R \cos(\pi s) e_z + R \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t) &= -\pi R r \sin(\pi s) e_z + \pi R r \cos(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) &= 2\pi R r \sin(\pi s) (-\sin(2\pi t) e_x + \cos(2\pi t) e_y). \end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, dass  $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$  ein rechtshändiges System bilden. Einsetzen dieser Vektoren in die 3-Form ergibt

$$\omega_{h(r,s,t)} \left( \frac{\partial h}{\partial r}(r,s,t), \frac{\partial h}{\partial s}(r,s,t), \frac{\partial h}{\partial t}(r,s,t) \right) = 2\pi^2 R^5 r^4 \sin(\pi s),$$

und es folgt

$$\int_K \omega = 2\pi^2 R^5 \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 r^4 \sin(\pi s) dt \right) ds \right) dr = \frac{4\pi}{5} R^5.$$

## 2.8.2 Äußere Ableitung einer 2-Form

In einem affinen Raum  $(X, V, +)$  mit affinen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  hat jede 2-Form  $\beta$  eine **Koordinatendarstellung**

$$\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j. \quad (2.98)$$

Gemäß der alternierenden Eigenschaft  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$  treffen wir für die Koeffizientenfunktionen die Konvention  $f_{ij} = -f_{ji}$ .

**Definition.** Die **äußere Ableitung** einer 2-Form  $\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$  ist die 3-Form

$$d\beta = \sum_{i < j} df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j. \quad (2.99)$$

(Das äußere Produkt ist bekanntlich assoziativ.)

**Bemerkung.** Unter Verwendung der Koordinatendarstellung der Differenziale  $df_{ij}$  lässt sich die äußere Ableitung  $d\beta$  auch folgendermaßen schreiben:

$$d\beta = \sum_{i < j < k} \left( \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k. \quad (2.100)$$

**Beispiel.** Es ist ein Naturgesetz, dass die äußere Ableitung der 2-Form  $B$  der magnetischen Feldstärke immer verschwindet:  **$dB = 0$** . Im  $E_3$  mit kartesischen Koordinaten,

$$B = B_{xy} dx \wedge dy + B_{yz} dy \wedge dz + B_{zx} dz \wedge dx,$$

lautet dieses Gesetz wie folgt:

$$dB = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial y} = 0. \quad (2.101)$$

**Fakt.** (“Zweimal  $d$  gibt Null.”) Unter einer exakten 2-Form  $\beta$  versteht man per Definition die äußere Ableitung einer 1-Form, also  $\beta = d\alpha$ . Kurze Rechnung zeigt, dass die äußere Ableitung einer exakten 2-Form identisch verschwindet:

$$d\beta = d(d\alpha) = 0. \quad \square \quad (2.102)$$

Für eine 2-Form  $\beta$  bezeichnen wir mit  $D\beta$  das Differenzial der Abbildung  $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ .

**Aufgabe.** Zeige, dass die äußere Ableitung  $d\beta$  die folgende (koordinatenfreie) Darstellung hat:

$$(d\beta)_p(u, v, w) = ((D_p \beta)(u))(v, w) - ((D_p \beta)(v))(u, w) + ((D_p \beta)(w))(u, v). \quad (2.103)$$

### 2.8.3 Divergenz eines Vektorfeldes

Wir definieren jetzt die Divergenz eines Vektorfeldes im Euklidischen Raum  $E_3$ . (Unsere Definition trifft den Kern der Sache nicht ganz, ist aber für jetzige Zwecke gut genug.)

Der Vektorraum  $\text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$  ist eindimensional, d.h. alle alternierenden 3-linearen Formen im  $\mathbb{R}^3$  sind proportional zum Spatprodukt  $\Omega$ . Multiplikation mit dem (“hungrigen”) Spatprodukt ergibt einen **Isomorphismus**

$$\mathcal{I}_3 : \mathbb{R} \rightarrow \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3), \quad a \mapsto a\Omega. \quad (2.104)$$

Anders gesagt haben wir  $\rho = \mathcal{I}_3^{-1}(\rho)\Omega$  für  $\rho \in \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$ . Punktweise Anwendung liefert einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_3 : \text{Funktionen} \rightarrow 3\text{-Formen}. \quad (2.105)$$

Für den späteren Gebrauch halten wir fest, dass für eine Funktion  $f$  und eine 3-Form  $\omega$  gilt:

$$\mathcal{I}_3^{-1}(f\omega) = f\mathcal{I}_3^{-1}(\omega). \quad (2.106)$$

In kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  hat man zudem

$$\mathcal{I}_3(1) = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz) = 1. \quad (2.107)$$

Unter Zuhilfenahme des aus Abschnitt 1.16 bekannten Isomorphismus  $\mathcal{I}_2$  definieren wir jetzt die Divergenz wie folgt.

**Definition.** Als Differenzialoperator 1. Ordnung, der Vektorfelder in Funktionen überführt, ist die **Divergenz** (im  $E_3$ ) folgendermaßen erklärt:

$$\text{div} : \text{Vektorfelder} \xrightarrow{\mathcal{I}_2} 2\text{-Formen} \xrightarrow{d} 3\text{-Formen} \xrightarrow{\mathcal{I}_3^{-1}} \text{Funktionen}, \quad (2.108)$$

also  $\text{div} = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2$ .

**Divergenz in kartesischen Koordinaten.** Für ein Vektorfeld  $v = v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z$  in kartesischen Koordinaten erhält man durch kurze Rechnung

$$\begin{aligned} \text{div}(v) &= (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2)(v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z) \\ &= (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d)(v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy) \\ &= \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Identität (2.106) verwendet wurde. Mit  $\mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$  resultiert der **Ausdruck**

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (2.109)$$

**Bemerkung.** Anders als die Rotation hängt die Divergenz von der Rechte-Hand-Regel nicht ab. Tatsächlich wird die Rechte-Hand-Regel in unserer Definition  $\text{div} = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2$  zweimal verwendet (nämlich über das Spatprodukt jeweils einmal in  $\mathcal{I}_2$  und  $\mathcal{I}_3^{-1}$ ) und somit am Ende gar nicht.

**Divergenz in Kugelkoordinaten.** Wir beginnen mit dem Ausdruck für ein Vektorfeld  $v$  in Kugelkoordinaten:

$$v = v_r \widehat{e}_r + v_\theta \widehat{e}_\theta + v_\phi \widehat{e}_\phi.$$

Um  $\mathcal{I}_2$  anzuwenden, benützen wir, dass die drei 1-Formen  $dr$ ,  $r d\theta$  und  $r \sin \theta d\phi$  ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden. Es folgt  $\mathcal{I}_2(dr) = r d\theta \wedge r \sin \theta d\phi$  usw. und somit

$$\mathcal{I}_2(v) = v_r r d\theta \wedge r \sin \theta d\phi + v_\theta r \sin \theta d\phi \wedge dr + v_\phi dr \wedge r d\theta.$$

Im nächsten Schritt wird einfach nur differenziert:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_2(v) &= \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta v_r) dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta v_\theta) d\theta \wedge d\phi \wedge dr + \frac{\partial}{\partial \phi}(r v_\phi) d\phi \wedge dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wenden wir das Inverse von  $\mathcal{I}_3$  an. Mit der Formel  $\mathcal{I}_3^{-1}(dr \wedge d\theta \wedge d\phi) = (r^2 \sin \theta)^{-1}$  resultiert

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \quad (2.110)$$

**Mitteilung.** Für beliebige Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  mit Volumenform  $dx \wedge dy \wedge dz = f d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3$  hat man für die Divergenz von  $v = \sum v_{\xi_j} \partial_{\xi_j}$  den Ausdruck

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{f} \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f v_{\xi_j}). \quad (2.111)$$

Von diesem Ergebnis liest man ab, dass die Divergenz allein von der Wahl der **Volumenform** bestimmt wird und von sonst nichts.  $\square$

Wir kennen bereits die Relation  $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$  auf Funktionen. Eine eng verwandte Aussage ist die folgende.

**Merke.** Als Konsequenz von ‘‘Zweimal  $d$  ist Null’’ (auf 1-Formen) hat man

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2)(\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ d \circ \mathcal{I}_1 = 0. \quad (2.112)$$

Die Hintereinanderausführung der Differenzialoperatoren von Rotation und Divergenz ergibt also immer Null:

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0. \quad (2.113)$$

## 2.8.4 Satz von Gauss

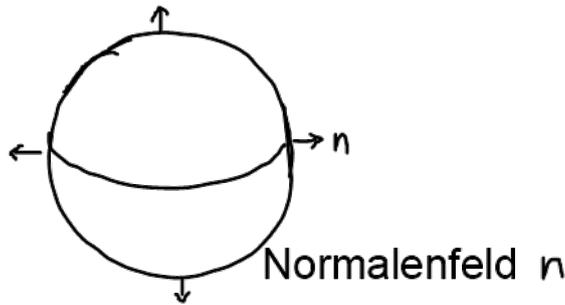
In Abschn. 2.8.1 wurde erklärt, was unter der Orientierung eines dreidimensionalen Gebiets  $U \subset X$  zu verstehen ist. Für die jetzt anstehende Aussage benötigen wir zusätzlich ein Verständnis, wie die Orientierung von  $U$  eine Orientierung auf dem zweidimensionalen Rand  $\partial U$  bestimmt.

**Definition.** Sei das dreidimensionale Gebiet  $U \subset X$  durch die 3-Form  $\Omega$  orientiert. Ist  $u$  ein Vektorfeld, das überall auf dem Rand von  $U$  von innen nach außen zeigt (bzgl.  $U$ ), so wird der Rand  $\partial U$  durch die 2-Form  $\omega = \Omega(u, \cdot, \cdot)$  orientiert, d.h. für  $p \in \partial U$  gilt

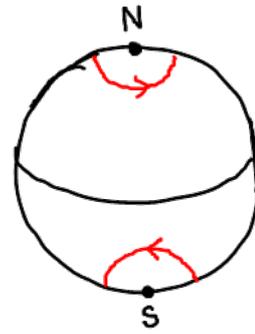
$$\begin{aligned} \omega_p(v, w) = \Omega(u(p), v, w) &> 0 \Leftrightarrow v, w \text{ positives System,} \\ &< 0 \Leftrightarrow v, w \text{ negatives System.} \end{aligned}$$

**Beispiel.**

Kugel  $U=K$  orientiert durch  $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ .



Kugeloberfläche  $\partial U = \partial K$  orientiert durch  $\omega = \Omega(n, \cdot, \cdot)$ :



$$\omega_N = (dx \wedge dy)_N = \vartheta_x \wedge \vartheta_y$$

$$\omega_S = -(dx \wedge dy)_S = +\vartheta_y \wedge \vartheta_x$$

**Satz.** Für einen affinen Raum  $(X, V, +)$  sei  $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$  eine differenzierbare 2-Form und  $U \subset X$  ein orientiertes dreidimensionales Gebiet mit Rand  $\partial U$ . Dann gilt

$$\int_U d\beta = \int_{\partial U} \beta. \quad (2.114)$$

**Bemerkung.** Man beachte die Ähnlichkeit (mit der Ersetzung  $U \leftrightarrow \Sigma$ ) zum Integralsatz von Abschnitt 2.7.3. Tatsächlich sind beide Integralsätze Spezialfälle des sogenannten **Allgemeinen Stokes'schen Satzes**,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (2.115)$$

für eine  $k$ -Form  $\omega$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $k + 1$ . Der Beweis des obigen Satzes ist nicht wesentlich verschieden von dem in Abschnitt 2.7.4 (und entfällt daher).

**Korollar (Satz von Gauss).** Sei  $v$  ein Vektorfeld im dreidimensionalen Euklidischen Raum  $E_3$ , und sei  $\partial U$  der Rand eines Gebiets  $U$ . Dann ist das Oberflächenintegral von  $v$  über  $\partial U$  gleich dem Volumenintegral der Divergenz von  $v$  über  $U$ :

$$\int_{\partial U} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_U \text{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.116)$$

**Beweis.** Durch Anwendung des obigen Satzes auf  $\beta = \mathcal{I}_2(v)$  erhalten wir

$$\int_{\partial U} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{\partial U} \mathcal{I}_2(v) = \int_U d\mathcal{I}_2(v) = \int_U (\mathcal{I}_3 \circ (\mathcal{I}_3^{-1} d\mathcal{I}_2))(v).$$

Der Satz von Gauss folgt dann mit  $(\mathcal{I}_3^{-1} d\mathcal{I}_2)(v) = \text{div}(v)$  und  $\mathcal{I}_3(1) = dx \wedge dy \wedge dz$ .

## 2.9 Visualisierung

### 2.9.1 1 Raumdimension

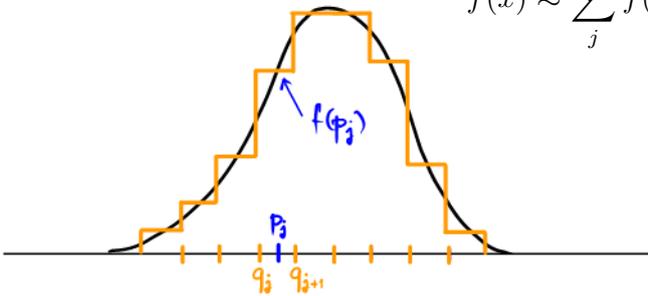
Wie schon mehrfach angedeutet wurde, veranschaulichen wir  $k$ -Formen in  $n$  Raumdimensionen durch  $(n - k)$ -dimensionale Objekte. Zur anschaulichen Vorbereitung des Satzes von Stokes (Abschnitt 2.7.3) führen wir jetzt das zugrunde liegende Approximationsprinzip am Beispiel der Raumdimension  $n = 1$  ein. In dieser einfachen Situation sind nur  $k = 0$  und  $k = 1$  zu betrachten (nämlich Funktionen bzw. 1-Formen). Wir beginnen mit dem Fall  $k = 0$ .

**Treppenfunktionen und 0-Ketten.** Als erstes berechnen wir die Approximation einer reellwertigen Funktion  $f(x)$  durch eine Treppenfunktion. Dazu benötigen wir den Begriff der **charakteristischen Funktion**  $\chi$  eines Intervalls  $[a, b]$ :

$$\chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & a < x < b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.117)$$

Nun wählen wir einen ersten Satz von Stützstellen  $q_j \in \mathbb{R}$  mit  $q_j < q_{j+1}$  für  $j \in \{0, \dots, N\}$ . (In der Praxis ängt die optimale Wahl von der zu approximierenden Funktion ab.) Einen zweiten Satz von **Stützstellen**  $p_j \in \mathbb{R}$  erklären wir dann dadurch, dass wir  $p_j$  jeweils gleich dem Mittelpunkt des Intervalls  $[q_j, q_{j+1}]$  setzen. In einer solchen Diskretisierung von  $\mathbb{R}$  können wir eine Funktion  $f$  (mit beschränktem Träger und beschränkter Variation) durch eine **Treppenfunktion** approximieren:

$$f(x) \approx \sum_j f(p_j) \chi_{[q_j, q_{j+1}]}(x). \quad (2.118)$$



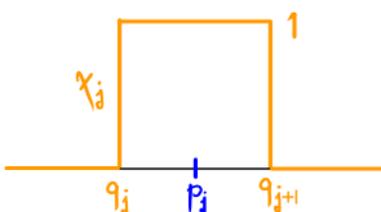
Mit den Abkürzungen

$$f_j \equiv f(p_j), \quad \chi_j \equiv \chi_{[q_j, q_{j+1}]} \quad (2.119)$$

haben wir die vereinfachte Schreibweise

$$f \approx \sum f_j \chi_j. \quad (2.120)$$

Wie wir aus Beispiel 3 von Abschnitt 1.2 wissen, bilden die reellwertigen Funktionen mit der Operation der punktweisen Addition einen Vektorraum. Diese Vektorraumstruktur bleibt bei der Einschränkung auf Treppenfunktionen erhalten (jedenfalls für eine feste Wahl der Sprungstellen  $q_j$ ). Wir bezeichnen den Vektorraum der Treppenfunktionen  $\sum f_j \chi_j$  mit  $C^0$ . Im vorliegenden Fall gilt  $\dim C^0 = N$ . Per Konstruktion haben wir (mit dem Kronecker  $\delta$ -Symbol  $\delta_{ij}$ )



$$\chi_i(p_j) = \delta_{ij}. \quad (2.121)$$

Es ist nun zweckmäßig und fruchtbar, die Auswertung einer Treppenfunktion auf einem Punkt als eine Art von (linearer) Paarung zu betrachten. Anders gesagt deuten wir die Punkte  $p_j$  als Basis“vektoren” eines zweiten Vektorraums,  $C_0 \equiv (C^0)^*$ , der zum Vektorraum  $C^0$  der Treppenfunktionen dual ist. Die Addition und Skalarmultiplikation in  $C_0$  wird folgendermaßen definiert:

$$f\left(\sum \lambda_j p_j\right) := \sum_j \lambda_j f(p_j) \quad (\lambda_j \in \mathbb{R}). \quad (2.122)$$

Die Elemente  $c = \sum_j \lambda_j p_j$  (mit reellen Koeffizienten  $\lambda_j$ ) von  $C_0$  heißen **0-Ketten**. Insgesamt haben wir also eine **Paarung**  $C^0 \times C_0 \rightarrow \mathbb{R}$  von Treppenfunktionen  $f \in C^0$  mit 0-Ketten  $c \in C_0$ :

$$f(c) = \left(\sum_i f_i \chi_i\right) \left(\sum_j \lambda_j p_j\right) = \sum_{i,j} f_i \lambda_j \chi_i(p_j) = \sum_j f_j \lambda_j. \quad (2.123)$$

**Treppenformen und 1-Ketten.** Als nächstes besprechen wir die Approximation einer 1-Form  $\mu : \mathbb{R} \supset M \rightarrow \mathbb{R}^*$  (mit beschränktem Träger  $M$ ) durch eine Treppenform. Im vorliegenden Kontext (mit Koordinatenform  $dx$ ) verstehen wir unter einer **Treppenform** einen Ausdruck

$$\sum_j m_j \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx \quad (m_j \in \mathbb{R}). \quad (2.124)$$

Es handelt sich also um eine Linearkombination der lokal konstanten 1-Formen  $\chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$ , mit reellen Koeffizienten  $m_j$ . Den Vektorraum solcher Treppenformen bezeichnen wir mit  $C^1$ .

Auch hier ist es zweckmäßig, einen passenden Dualraum  $C_1 \equiv (C^1)^*$  einzuführen. Dieser heißt der Vektorraum der **1-Ketten** und wird durch die Basis-Intervalle

$$\gamma_j := [p_{j-1}, p_j] \quad (2.125)$$

aufgespannt. Die Paarung  $C^1 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}$  erfolgt durch das Integral. Auf der Ebene der Basisvektoren  $\chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx \in C^1$  und  $\gamma_i \in C_1$  haben wir

$$\int_{\gamma_i} \chi_{[p_{j-1}, p_j]}(x) dx = \delta_{ij} \Delta_j, \quad \Delta_j = p_j - p_{j-1}. \quad (2.126)$$

Die Addition und Skalarmultiplikation in  $C_1$  erklären wir nach dem gleichen Prinzip wie für  $C_0$ :

$$\mu\left(\sum_j r_j \gamma_j\right) \equiv \int_{\sum r_j \gamma_j} \mu := \sum_j r_j \int_{\gamma_j} \mu. \quad (2.127)$$

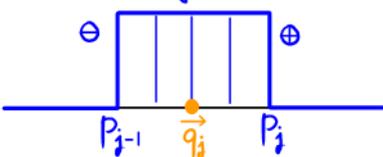
Nun nehmen wir die folgende **Identifikation** (!) vor:

$$q_j \equiv \Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx; \quad (2.128)$$

wir verwenden also das Symbol des Punktes  $q_j$  für die im Integral auf Eins normierte Treppenform  $\Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$ . (Das ist deshalb möglich, weil die Rolle der Stützpunkte allein von den  $p_j$  getragen wird und wir die  $q_j$  nicht länger in ihrer Rolle als Punkte benötigen.) Man vermerke die Kronecker- $\delta$ -Paarung

$$q_i(\gamma_j) \equiv \int_{\gamma_j} q_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\gamma_j} \chi_{[p_{i-1}, p_i]}(x) dx = \delta_{ij}. \quad (2.129)$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Paarung  $C^1 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\left( \sum_i m_i q_i \right) \left( \sum_j r_j \gamma_j \right) = \sum_{i,j} m_i r_j q_i(\gamma_j) = \sum_j m_j r_j. \quad (2.130)$$


Es sei noch darauf hingewiesen, dass wir den Punkt  $q_j$  genau genommen mit einer **äußeren Orientierung** (durch Pfeil oder Polarität) ausstatten müssen, um die gerichtete 1-Form  $\Delta_j^{-1}[p_{j-1}, p_j] dx$  präzise nachzubilden.

Nach diesen Vorbereitungen approximieren wir eine vorgegebene 1-Form  $\mu = f(x) dx$  durch eine Treppenform in  $C^1$ :

$$\mu \approx \sum_j m_j q_j = \sum_j \frac{m_j}{\Delta_j} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx, \quad m_j = \int_{\gamma_j} \mu. \quad (2.131)$$

In Worten: wir ersetzen  $\mu$  durch die lokal konstante 1-Form  $\sum_j m_j q_j$  – dabei wählen wir die Koeffizienten  $m_j$  so, dass für jedes Basis-Intervall  $\gamma_i = [p_{i-1}, p_i]$  das Integral  $m_i = \int_{\gamma_i} \sum_j m_j q_j$  der approximierenden Treppenform mit dem Integral  $\int_{\gamma_i} \mu$  der Ausgangsform übereinstimmt.

**Differenzial.** Unsere Treppenfunktionen  $f \in C^0$  sind nicht stetig und schon gar nicht differenzierbar. Andererseits wollen wir (mit Blick auf den angekündigten Satz von Stokes) eine Beziehung zwischen Integral und Differenzial herstellen. Der gegenwärtige Kontext wirft daher die Frage auf, was mit dem **(diskretisierten) Differenzial**  $d : C^0 \rightarrow C^1$  gemeint sein soll.

Die richtige Antwort auf diese Frage leitet sich aus dem bekannten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ab:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

der natürlich in unserem Approximationsschema von Treppenformen und Ketten weiterhin gelten soll. Dazu machen wir mit der 0-Kette  $c = \sum r_j \gamma_j$  die folgende Umformung:

$$\int_c df = \sum_j r_j \int_{p_{j-1}}^{p_j} df = \sum_j r_j (f(p_j) - f(p_{j-1})). \quad (2.132)$$

Für eine sprunghafte Funktion  $f = \chi_i$  ergibt die linke Seite keinen Sinn (jedenfalls nicht a priori), die rechte Seite aber sehr wohl. Deshalb definieren wir

$$\int_c d\chi_i := \sum_j r_j (\chi_i(p_j) - \chi_i(p_{j-1})) \quad (2.133)$$

und erhalten mit  $\chi_i(p_j) = \delta_{ij}$  den Wert

$$\int_c d\chi_i = r_i - r_{i+1}. \quad (2.134)$$

Nun wissen auch, dass gilt

$$\int_c q_i = \sum_j \frac{r_j}{\Delta_j} \int_{p_{j-1}}^{p_j} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx = r_i. \quad (2.135)$$

Durch Vergleich folgt

$$d\chi_i = q_i - q_{i+1}. \quad (2.136)$$

Für das Differenzial einer allgemeinen Treppenfunktion haben wir damit

$$d \sum_j f_j \chi_j = \sum_j (f_j - f_{j-1}) q_j. \quad (2.137)$$

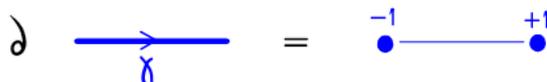
**Randoperator und Hauptsatz.** Für eine konzise Notation und Buchführung brauchen wir noch eine lineare Abbildung zwischen 1-Ketten und 0-Ketten, den sogenannten **Randoperator**:

$$\partial : C_1 \rightarrow C_0. \quad (2.138)$$

Er ist definiert durch

$$\partial \sum_j r_j \gamma_j = \sum_j r_j \partial \gamma_j, \quad \partial \gamma_j = -p_{j-1} + p_j. \quad (2.139)$$

Der Rand der elementaren 1-Kette  $\gamma_j = [p_{j-1}, p_j]$  ist also die 0-Kette  $\partial \gamma_j$ , die aus dem Endpunkt  $p_j$  mit dem positiven Vorzeichen und dem Anfangspunkt  $p_{j-1}$  mit dem negativen Vorzeichen besteht.



Vermöge dieses Randoperators  $\partial$  lässt sich der Hauptsatz (2.132) auch wie folgt formulieren:

$$\int_c df = f \left( \sum_j r_j (p_j - p_{j-1}) \right) = f(\partial c). \quad (2.140)$$

Um herauszustreichen, dass auf beiden Seiten der gleiche Typ von Paarung  $C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 0, 1$ ) vorliegt, schreiben wir diesen Hauptsatz auch in der Form

$$(df)(c) \equiv \int_c df = \int_{\partial c} f \equiv f(\partial c). \quad (2.141)$$

**Resümée.** Uns sind zwei lineare Abbildungen gegeben: der Randoperator  $\partial : C_1 \rightarrow C_0$  und das Differenzial  $d : C^0 \rightarrow C^1$ . Der Hauptsatz (“Integrieren ist die Umkehrung von Differenzieren”) besagt, dass die eine Abbildung die Transponierte der anderen ist.

$$\begin{array}{ccc} C^0 & \xrightarrow{d} & C^1 \\ \times & & \times \\ C_0 & \xleftarrow{\partial} & C_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array} \quad (2.142)$$

**Graphische Illustration.** Im Grunde ist der Vektorraum  $C^k$  einfach nur der Dualraum zum Vektorraum  $C_k$  mittels der (Integral-)Paarung  $C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}$ . Zum Zweck der anschaulichen Darstellung setzen wir aber noch einen Trick oben drauf: wir stellen uns die Elemente von  $C^1$  als 0-Ketten und jene von  $C^0$  als 1-Ketten vor! Tatsächlich gehört jede charakteristische Funktion  $\chi_j$  zu genau einem Intervall (oder Linienstück)  $[q_j, q_{j+1}]$ , und so können wir jede Treppenfunktion

$f = \sum_j f_j \chi_j$  als 1-Kette von Linienstücken  $\chi_j$  mit “Stärken” (oder “Gewichten” oder “Massen”)  $f_j$  auffassen. Analog gehört jede elementare Treppenform  $\Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$  zu genau einem Punkt  $q_j$  – davon haben wir schon in (2.128) Gebrauch gemacht. So können wir jede Treppenform  $\mu = \sum_j m_j q_j$  als 0-Kette von Punkten  $q_j$  mit Stärken/Gewichten/Massen  $m_j$  auffassen.

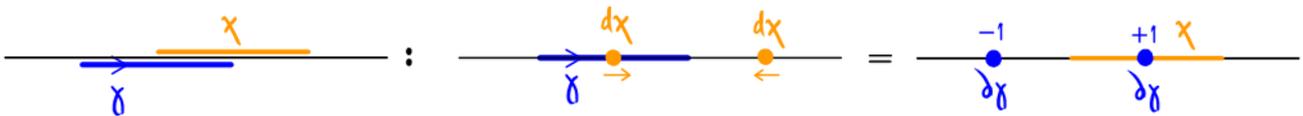


**Integral als Schnittpaarung.** In unserem diskreten Bild (von  $k$ -Formen als  $(n - k)$ -Ketten) nimmt die Integralpaarung

$$C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, c) \mapsto \int_c \omega,$$

die Form einer “Schnittpaarung” an. Im Fall von  $k = 0$  “schneiden” wir die 0-Kette  $\sum_j r_j p_j$  mit der 1-Kette  $\sum_i f_i \chi_i$ , siehe Gleichung (2.123). Die elementare Schnittpaarung ist hierbei  $\chi_i(p_j) = \delta_{ij}$ ; sie verschwindet, wenn das Linienstück  $\chi_i$  den Punkt  $p_j$  nicht schneidet; und sie ist gleich Eins, wenn  $p_j$  im Linienstück  $\chi_i$  enthalten ist (also ein Schnittpunkt vorliegt). Im Fall von  $k = 1$  schneiden wir die 1-Kette  $\sum_j r_j \gamma_j$  mit der 0-Kette  $\sum_i m_i q_i$ , siehe Gleichung (2.130). Die elementare Schnittpaarung ist nun  $q_i(\gamma_j) = \delta_{ij}$ ; sie verschwindet, wenn der Punkt  $q_i$  das Linienstück  $\gamma_j$  nicht schneidet; und sie ist gleich Eins, wenn  $q_i$  in  $\gamma_j$  enthalten ist.

Mit dieser Vorstellung von Schnittpaarung nimmt der Hauptsatz eine intuitiv verständliche Bedeutung an, die in der nächsten Graphik illustriert ist.



Die linke Graphik stellt die eindimensionalen Akteure vor: eine gerichtete Linie  $\gamma$  und ein (ungerichtetes) Linienstück  $\chi$ . Die mittlere Graphik illustriert die Situation auf der linken Seite ( $\int_\gamma d\chi$ ) des Hauptsatzes. Das Differenzial  $d\chi$  besteht aus zwei gerichteten Punkten – die jeweilige Richtung liest man aus Gleichung (2.136) ab (es ist immer die Richtung der Zunahme von  $\chi$ ). Das Integral  $\int_\gamma d\chi$  ist von Null verschieden, da die Linie  $\gamma$  einen Punkt von  $d\chi$  kreuzt (oder schneidet). Es hat den Wert  $+1$  (anstatt  $-1$ ), weil die Richtung von  $\gamma$  mit der Richtung des gekreuzten Punkts übereinstimmt. Die rechte Graphik illustriert die Situation auf der rechten Seite ( $\int_{\partial\gamma} \chi$ ) des Hauptsatzes. Der durch Paarung ermittelte Wert ist wieder Eins, da ein Punkt von  $\partial\gamma$  mit Gewicht  $+1$  im Linienstück  $\chi$  enthalten ist.

Man erkennt somit, dass der Hauptsatz einen topologischen Sachverhalt wiedergibt: wenn (in 1 Raumdimension) ein Intervall einen Randpunkt eines anderen Intervalls enthält, dann gilt dasselbe mit vertauschten Rollen der beiden Intervalle. Um zur Gleichheit  $\int_\gamma d\chi = \int_{\partial\gamma} \chi$  zu gelangen, reicht eine korrekte Buchführung (über die Orientierungs- oder Richtungsverhältnisse).

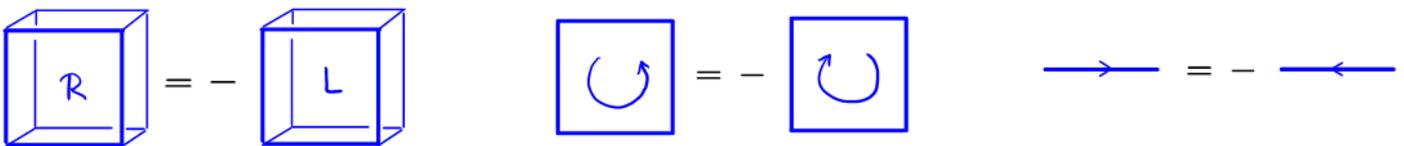
**Hinweis.** Man beachte die Ähnlichkeit zwischen Differenzial  $d$  und Randoperator  $\partial$  in diesem Bild. Hierauf werden wir später noch genauer eingehen.

### 2.9.2 3 Raumdimensionen

Nach ausführlicher Behandlung des eindimensionalen Falles gehen wir jetzt zu 3 Raumdimensionen über. (Der Fall von 2 Raumdimensionen wird in den Übungen behandelt.) Wie zuvor ist die Grundlage der diskreten Approximation eine fest gewählte Aufteilung des Raumes in Zellen (vormals Intervallen). Die Raumaufteilung lässt sich auf vielerlei Weise bewerkstelligen – mit Quadern, Tetraedern (oder Simplizes), Polytopen, usw. Der Einfachheit halber benützen wir hier ein kubisches Gitter (tatsächlich zwei zueinander duale kubische Gitter).

**$k$ -Ketten und Randoperator.** Wir stellen uns vor, dass der dreidimensionale Raum (oder der für eine physikalische Anwendung relevante Teil davon) in identische Würfel eingeteilt ist. Diese Würfel heißen auch die 3-Zellen des kubischen Gitters. Die quadratischen Seitenflächen der Würfel sind die 2-Zellen, die Kanten die 1-Zellen, und die Eckpunkte die 0-Zellen. Das Gesamtkonstrukt dieses kubischen Gitters nennen wir  $K$  (wie **Komplex**).

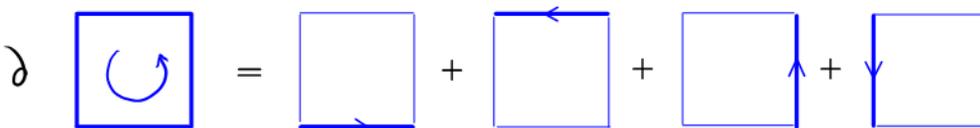
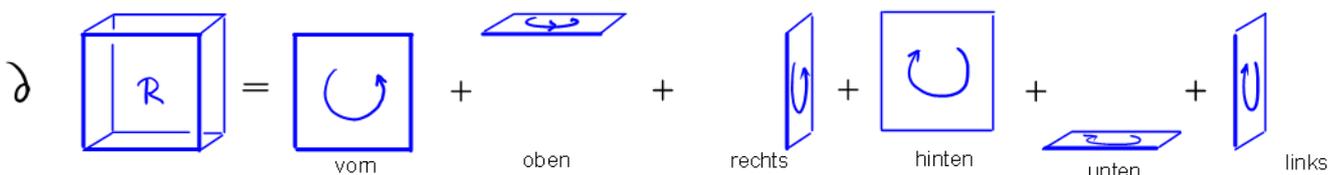
Wie schon erläutert, verstehen wir unter einer  $k$ -Kette eine formale Linearkombination (mit reellen Koeffizienten) von  $k$ -Zellen. Der Vektorraum der  $k$ -Ketten auf  $K$  wird mit  $C_k(K)$  bezeichnet. Die Basiselemente von  $C_3(K)$ ,  $C_2(K)$ ,  $C_1(K)$  und  $C_0(K)$  sind also die elementaren Würfel, Quadrate, Linienstücke bzw. Punkte. Für die genaue Buchführung (insbesondere die nachfolgende Basisdarstellung des Randoperators) statten wir jede  $k$ -Zelle mit einer **inneren Orientierung** aus. (Die innere Orientierung von Punkten entfällt.)



Der **Randoperator**  $\partial$  ist eine lineare Abbildung, die  $k$ -Ketten auf  $(k - 1)$ -Ketten abbildet:

$$C_3(K) \xrightarrow{\partial} C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K). \quad (2.143)$$

Es gilt  $\partial \circ \partial = 0$  ("der Rand vom Rand ist Null"). Als lineare Abbildung ist der Randoperator  $\partial$  vollständig durch seine Wirkung auf die Basiselemente charakterisiert. Diese Wirkung sieht graphisch wie folgt aus:



**$k$ -Formen und äußere Ableitung.** Die  $k$ -Ketten auf dem Komplex  $K$  liefern uns die Integrationswege, -flächen und -gebiete. Wir wenden uns jetzt den Integranden, den  $k$ -Formen, zu. Zu ihrer diskreten Approximation führen wir einen zweiten, zu  $K$  passenden Komplex  $\tilde{K}$  ein. Im vorliegenden Fall ist  $\tilde{K}$  wieder ein kubischer Komplex. Die 0-Zellen von  $\tilde{K}$  liegen in den Mittelpunkten der 3-Zellen von  $K$ , die 1-Zellen von  $\tilde{K}$  werden von den 2-Zellen von  $K$  mittig geteilt, usw. (diese Beziehung zwischen  $K$  und  $\tilde{K}$  ist umseitig graphisch illustriert).

$$\begin{aligned}
 C^3(\tilde{K}) : & \quad \overset{\mathcal{R}}{\bullet} = - \overset{\mathcal{L}}{\bullet} & C^2(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \curvearrowright \text{---} = - \text{---} \curvearrowleft \text{---} \\
 C^1(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \uparrow \text{---} = - \text{---} \downarrow \text{---} \\
 C^0(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \text{---} \text{---} & \chi = & \begin{cases} 1 & \text{innen,} \\ 0 & \text{außen.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

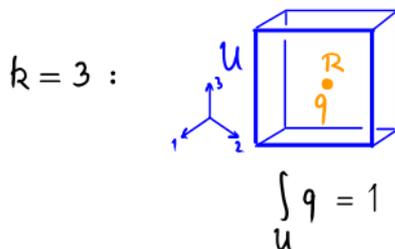
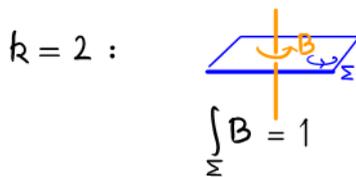
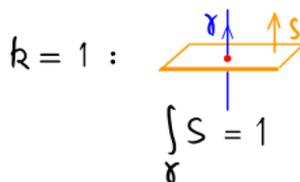
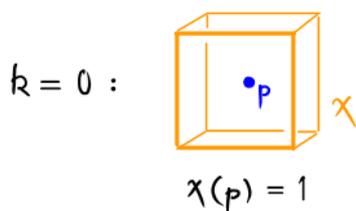
Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum der  $(3 - k)$ -Ketten mit äußerer Orientierung auf  $\tilde{K}$ . (Die äußere Orientierung von 3-Zellen entfällt.) Dieser wird mit  $C^k(\tilde{K})$  bezeichnet. Die diskretisierte äußere Ableitung  $d$  (engl.: coboundary operator) ist eine lineare Abbildung

$$C^0(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^1(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^2(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C_3(\tilde{K}). \tag{2.144}$$

Es gilt  $d \circ d = 0$  ("Zweimal  $d$  ist Null"). Aufgrund der Linearität reicht es wieder, die äußere Ableitung auf den Basiselementen anzugeben. Die Wirkung auf die Basis ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
 d \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \nearrow \text{---} + \text{---} \downarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \searrow \text{---} + \text{---} \uparrow \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \\
 & \quad \text{vorn} \quad \text{oben} \quad \text{rechts} \quad \text{hinten} \quad \text{unten} \quad \text{links} \\
 d \text{---} \curvearrowright \text{---} &= \text{---} \curvearrowleft \text{---} + \text{---} \curvearrowright \text{---} + \text{---} \curvearrowleft \text{---} + \text{---} \curvearrowright \text{---} \\
 d \text{---} \curvearrowleft \text{---} &= \text{---} \overset{\mathcal{L}}{\bullet} + \text{---} \overset{\mathcal{R}}{\bullet}
 \end{aligned}$$

**Integral als Schnittpaarung.** Die beiden zueinander passenden Komplexe  $K$  und  $\tilde{K}$  sind so konstruiert, dass die Schnittmenge einer  $k$ -Zelle von  $K$  mit einer  $(3 - k)$ -Zelle von  $\tilde{K}$  entweder die Nullmenge ist oder aus einem gemeinsamen Punkt besteht. Im letzteren Fall wird dem Schnittpunkt durch Orientierungsvergleich der Wert  $\pm 1$  zugewiesen. Auf diese Weise (und durch lineare Fortsetzung) entsteht die Schnittpaarung  $\int : C^k(\tilde{K}) \times C_k(K) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $k = 0, 1, 2, 3$ . Diese Paarung spielt die Rolle des Integrals.

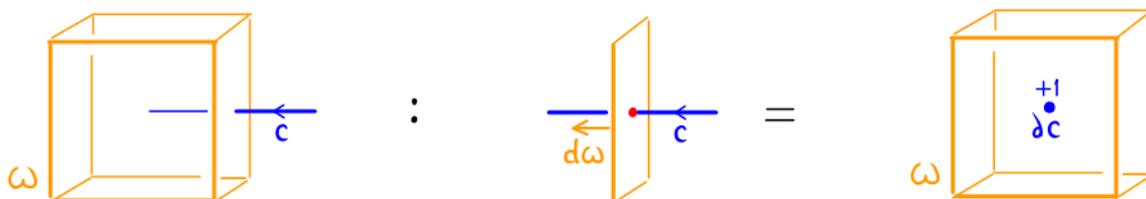


**Allgemeiner Satz von Stokes.** Für eine differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  und eine  $(k+1)$ -Kette  $c$  gilt der Allgemeine Stokes'sche Satz,

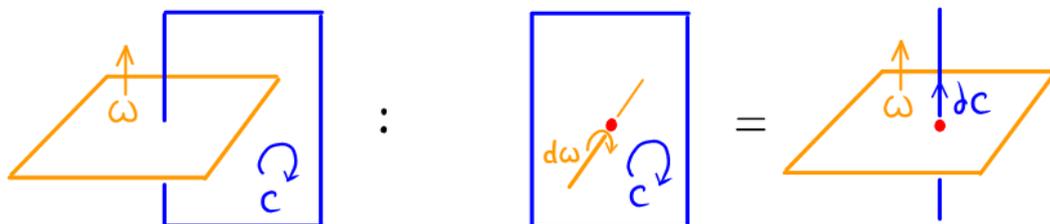
$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (2.145)$$

Er heißt ausführlich der Satz von **Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré**. Unser diskretes Approximationsschema ist so konstruiert, dass der Allgemeine Stokes'sche Satz mit dem als Schnittpaarung verstandenen Integral seine Gültigkeit behält. Der Beweis des Satzes erfordert in unserer diskreten Situation lediglich die Inspektion einiger elementarer Fälle:

- $k = 0$  ( $\omega \in C^0(\tilde{K})$ ,  $c \in C_1(K)$ ; "Hauptsatz"):



- $k = 1$  ( $\omega \in C^1(\tilde{K})$ ,  $c \in C_2(K)$ ; Satz von Stokes im engeren Sinn):



- $k = 2$  ( $\omega \in C^2(\tilde{K})$ ,  $c \in C_3(K)$ ; Satz von Gauss):

