2.10 Formen vom ungeraden Typ

Motivation. Das Bild  "stimmt" für die Linienstücke der magnetischen Feldstärke B. Nicht so für einige andere 2-Formen der physikalischen dreidimensinalen Welt! (Mit 2-Formen meinen wir hier Größen, die über Flächen zu integrieren sind.) Für die sogenannten "Stromdichten" (von Masse, Energie, Ladung, usw.) "stimmt" das andere Bild:  ; dabei gibt das Linienstück den Stromverlauf und der Pfeil die Stromrichtung an.

Fazit. Die bislang eingeführten mathematischen Objekte taugen für manche, aber nicht für alle physikalischen Zwecke, und wir benötigen noch eine Erweiterung des Kalküls.

2.10.1 Innere und äußere Orientierung

Wir haben zwei unterschiedliche Typen von Linien oder Linienstücken kennengelernt: (i) Zum Zweck der Integration von 1-Formen verwenden wir Linien mit Richtungssinn. (ii) Zum Zweck der anschaulichen Modellierung von 2-Formen (im E_3) benützen wir Linienstücke mit Zirkulationssinn. Im ersten Fall spricht man von einer Linie mit innerer Orientierung, im zweiten Fall von einem Linienstück mit äußerer Orientierung.

Die gleiche Unterscheidung zwischen innerer und äußerer Orientierung trifft man für Punkte, Flächen und Gebiete. Eine Fläche Σ, die als Integrationsfläche für eine 2-Form dient, trägt wie wir wissen einen Zirkulationssinn; das nennt man in diesem Fall eine innere Orientierung. Die Flächenstücke einer 1-Form im E_3 , z.B. der elektrischen Feldstärke E, tragen eine Durchstoßrichtung oder Polarität; hier spricht man wieder von äußerer Orientierung.

Im Fall von Punkten (minimale Dimension) und dreidimensionalen Gebieten (maximale Dimension im E_3) ist die Sprechweise ähnlich, wenn auch mit einer kleinen Ausnahmeregelung. Ein Punkt mit Händigkeit ist ein Punkt mit äußerer Orientierung, und ein 3-dimensionales Gebiet mit Händigkeit ist ein Gebiet mit innerer Orientierung. Hingegen ist unter einem Punkt mit innerer Orientierung per Definition ein Punkt ohne jede Orientierung zu verstehen. Ebenso ist ein Gebiet (maximaler Dimension, also $d = 3$ im E_3) mit äußerer Orientierung ein Gebiet ohne jede Orientierung.

Ganz allgemein ist Orientierung ein binärer Begriff, d.h. die Wahl einer Orientierung ist immer eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten. Der Pfeil auf einer Linie mit innerer Orientierung zeigt entweder in der einen Richtung oder in der anderen Richtung; der Zirkulationssinn einer Linie mit äußerer Orientierung ist entweder gleich dem Uhrzeigersinn oder gleich dem Gegenuhrzeigersinn; ein geordnetes System $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ von linear unabhängigen Vektoren bildet entweder ein rechtshändiges oder ein linkshändiges System. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. So entspricht die Wahl einer Orientierung immer der Wahl eines Elements der Menge $\{\pm 1\}$.

Zum Zweck der Sprachökonomie vereinbaren wir die folgende Sprechweise: 0-Zelle für Punkt, 1-Zelle für (offene) Linie, 2-Zelle für Quadrat-Fläche, 3-Zelle für Quader-Gebiet. Ist c eine orientierte k-Zelle (mit innerer oder äußerer Orientierung), so vereinbaren wir die Konvention, dass $-c$ die gleiche k-Zelle mit der umgekehrten Orientierung ist. Wenn c zum Beispiel eine Linie mit

Richtungssinn ist, dann ist $-c$ die gleiche Linie mit dem umgekehrten Richtungssinn.

Die Entweder-Oder Eigenschaft von Orientierung spielt auch eine Rolle in einer Konstruktion, die Zellen mit innerer und äußerer Orientierung miteinander in Beziehung setzt. Sei $\tilde{\gamma}$ eine Linie mit äußerer Orientierung, und sei γ die gleiche Linie (als Punktemenge), aber mit einer inneren Orientierung. Dann bestimmt das Paar $\gamma\,,\tilde{\gamma}$ eine Orientierung (in diesem Fall eine Händigkeit) des umgebenden Raumes; das ist die Händigkeit der Hand, deren Finger sich gemäß des Zirkulationssinnes von $\tilde{\gamma}$ krümmen, wenn der Daumen in Richtung des Richtungssinnes von γ zeigt.

Per Annahme bilde das Paar $\gamma\,,\tilde{\gamma}$ jetzt eine rechte Hand. Diesen Sachverhalt drücken wir dann formelmäßig so aus:

$$\tilde{\gamma} = [\gamma\,;\mathrm{rechts}] \equiv [\gamma\,;R]. \tag{2.146}$$

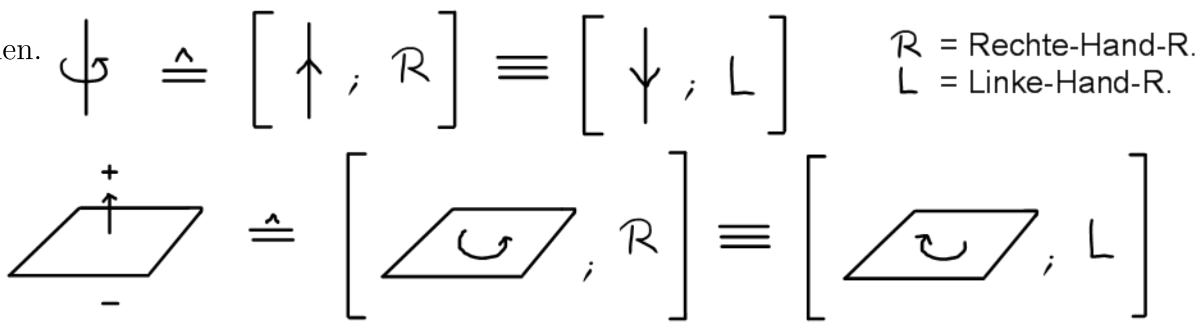
Allerdings ist aus Sicht der Zelle $\tilde{\gamma}$ mit äußerer Orientierung der Richtungssinn von γ ein irrelevantes Stück von Information. Es gibt keinen guten Grund, warum wir γ und nicht $-\gamma$ benutzen sollen. Da das Paar $\gamma\,,\tilde{\gamma}$ eine rechte Hand darstellt, bildet das neue Paar $-\gamma\,,\tilde{\gamma}$ eine linke Hand. Nach dem gleichen Prinzip wie oben haben wir also

$$\tilde{\gamma} = [-\gamma\,;\mathrm{links}] \equiv [-\gamma\,;L]. \tag{2.147}$$

Aus Gründen der Konsistenz müssen wir deshalb die Identifikation

$$[\gamma\,;R] \equiv [-\gamma\,;L] \tag{2.148}$$

vornehmen.



Hier tritt nun die tiefere Bedeutung der eben eingeführten Notation zutage: ist c eine Zelle mit innerer Orientierung und $\mathrm{Or} \in \{R\,,L\}$ eine Orientierung des Raumes, dann steht $[c\,;\mathrm{Or}]$ für die Äquivalenzklasse, die aus dem Paar $c\,,\mathrm{Or}$ und dem Paar $-c\,,-\mathrm{Or}$ besteht:

$$[c\,;\mathrm{Or}] = [-c\,;-\mathrm{Or}]. \tag{2.149}$$

Formal gesprochen wirkt die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{+1,-1\}$ auf beide Glieder des Paares, und wir bilden Äquivalenzklassen, indem wir durch diese Gruppenwirkung teilen. Diese Operation der Bildung von Äquivalenzklassen ist distributiv bzgl. der Addition:

$$[c + c'\,;\mathrm{Or}] = [c\,;\mathrm{Or}] + [c'\,;\mathrm{Or}], \tag{2.150}$$

und linear bzgl. der Skalarmultiplikation:

$$[\lambda\, c\,;\mathrm{Or}] = \lambda\,[c\,;\mathrm{Or}] \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{2.151}$$

2.10.2 Differenzialformen vom ungeraden Typ

Definition. Unter einer k-Form $\widetilde{\omega}$ vom ungeraden Typ (kurz: einer ungeraden k-Form $\widetilde{\omega}$) versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\widetilde{\omega} = [\omega\,;\mathrm{Or}] \equiv [-\omega\,;-\mathrm{Or}], \tag{2.152}$$

wobei $\omega:\ X \to \mathrm{Alt}^k(V)$ eine k-Form und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums V ist. (Wie zuvor ist V der Differenzvektorraum des affinen Raums X.)

Bemerkung. Uns wird nur der Spezialfall $X = E_3\,,\ V = \mathbb{R}^3$ beschäftigen. In diesem Fall haben wir entweder $\mathrm{Or} = R$ (Rechte-Hand-Regel) oder $\mathrm{Or} = L$ (Linke-Hand-Regel), und wir vereinbaren die Konvention $-R = L$ und $-L = R$.

Definition. Eine ungerade 3-Form im E_3 heißt eine Dichte. (Allgemeiner spricht man bei ungeraden n-Formen im n-dimensionalen Raum von Dichten.) Eine ungerade 2-Form im E_3 heißt auch eine Stromdichte oder Flussdichte.

Die Operationen von äußerer Ableitung und äußerem Produkt übertragen sich in natürlicher Weise auf ungerade Formen. Im Fall der äußeren Ableitung definiert man

$$\mathrm{d}\,[\omega\,;\mathrm{Or}] := [\mathrm{d}\omega\,;\mathrm{Or}], \tag{2.153}$$

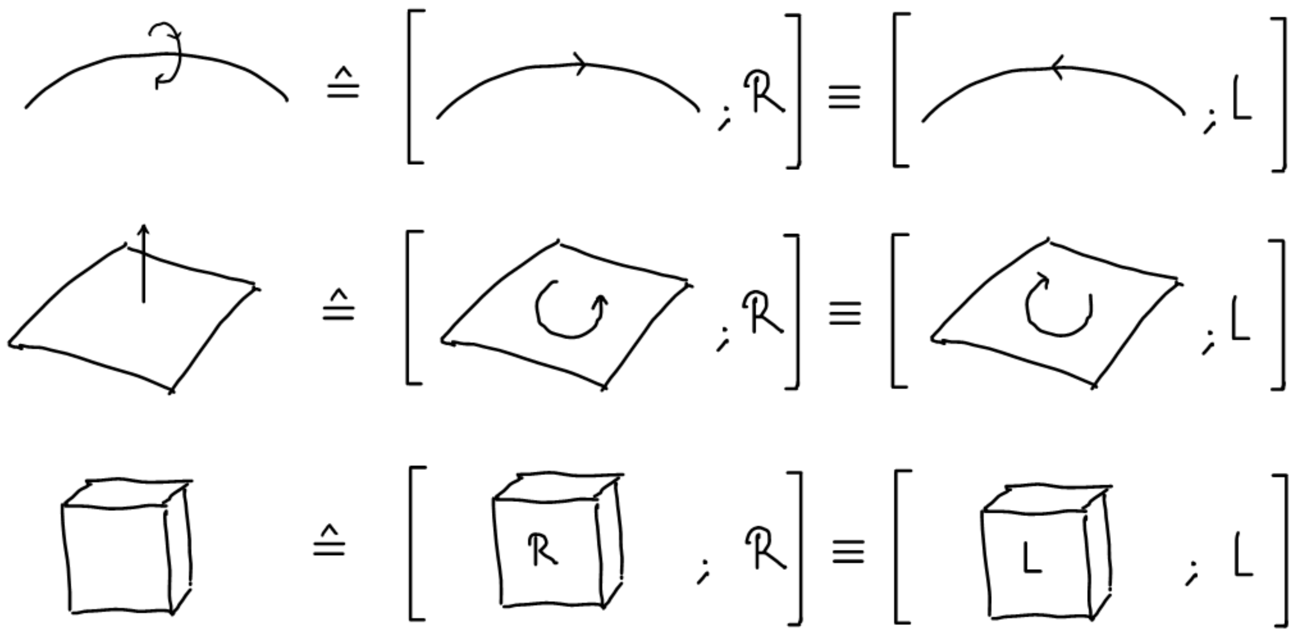
und im Fall des äußeren Produkts

$$\alpha \wedge [\beta\,;\mathrm{Or}] := [\alpha\wedge\beta\,;\mathrm{Or}]\,, \quad [\alpha\,;\mathrm{Or}] \wedge [\beta\,;\mathrm{Or}] := \alpha\wedge\beta. \tag{2.154}$$

Mit $[\beta\,;-\mathrm{Or}] = [-\beta\,;\mathrm{Or}]$ folgt insbesondere $[\alpha\,;\mathrm{Or}] \wedge [\beta\,;-\mathrm{Or}] = -\alpha\wedge\beta$.

2.10.3 Integration ungerader Formen

Zum Zweck der sinnvollen Integration ungerader Formen müssen wir zuerst die Beschaffenheit der Integrationsmannigfaltigkeit (d.h. der Kurven, Flächen, Gebiete) entsprechend anpassen. Dies geschieht nach dem gleichen Prinzip wie oben:



Definition. Unter einem k-dimensionalen Integrationsgebiet ($k=1$: Kurve, $k=2$: Fläche, $k=3$: Raumgebiet, usw.) mit äußerer Orientierung versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\widetilde{c} = [c\,;\mathrm{Or}] \equiv [-c\,;-\mathrm{Or}]. \tag{2.155}$$

Hierbei ist c ein k-dimensionales Integrationsgebiet mit innerer Orientierung (d.h. vom schon bekannten Typ) und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums.

Bemerkung. Für ein n-dimensionales Gebiet in n Dimensionen ist eine äußere Orientierung gleichbedeutend mit gar keiner Orientierung (siehe z.B. die letzte Skizze auf der vorigen Seite).

Definition. Wir erklären das Integral einer ungeraden k-Form $\widetilde{\omega} = [\omega\,;\mathrm{Or}]$ über ein k-dimensionales Integrationsgebiet $\widetilde{c} = [c\,;\mathrm{Or}]$ durch

$$\int_{\widetilde{c}} \widetilde{\omega} = \int_{[c\,;\,\mathrm{Or}]} [\omega\,;\mathrm{Or}] := \int_c \omega. \tag{2.156}$$

Wir beseitigen also die Orientierung des ambienten Raums sowohl für die ungerade k-Form wie auch für das Integrationsgebiet und drücken somit das neue Integral durch das schon bekannte Integral aus. Im inkongruenten Fall verfahren wir natürlich so:

$$\int_{[c\,;-\mathrm{Or}]} [\omega\,;\mathrm{Or}] = \int_{[c\,;-\mathrm{Or}]} [-\omega\,;-\mathrm{Or}] = -\int_c \omega. \tag{2.157}$$

Bemerkung. Wenn wir nur Dichten zu integrieren hätten, ließe sich die Definition deutlich vereinfachen (durch konsequentes Eliminieren von Orientierung jeder Art). Der recht aufwändige Formalismus wird dadurch erzwungen, dass wir zur naturgetreuen Beschreibung physikalischer Vorgänge auch ungerade 2-Formen (also Stromdichten) und ungerade 1-Formen sinnvoll integrieren wollen/müssen. □

Es folgt jetzt die Übertragung aller Integralsätze. Sei dazu $\widetilde{\omega} = [\omega\,;\mathrm{Or}]$ eine ungerade k-Form und $\widetilde{c} = [c\,;\mathrm{Or}]$ ein $(k+1)$-dimensionales Integrationsgebiet mit äußerer Orientierung. Der Rand von $\widetilde{c}$ wird erklärt durch

$$\partial\widetilde{c} := [\partial c\,;\mathrm{Or}]. \tag{2.158}$$

Dann haben wir

$$\int_{\widetilde{c}} \mathrm{d}\widetilde{\omega} = \int_{[c\,;\mathrm{Or}]} [\mathrm{d}\omega\,;\mathrm{Or}] = \int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{[\partial c\,;\mathrm{Or}]} [\omega\,;\mathrm{Or}] = \int_{\partial\widetilde{c}} \widetilde{\omega}. \tag{2.159}$$

Der (Allgemeine) Stokes'sche Satz gilt also auch (mutatis mutandi) für den Fall ungerader Formen.

2.10.4 Beispiele aus der Theorie des Elektromagnetismus

Beispiel 1: elektrische Ladungsdichte. Die elektrische Ladungsdichte ρ im E_3 ist eine ungerade 3-Form:

$$\rho = f\,[\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,;R] = f\,[-\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,;L]. \tag{2.160}$$

Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\rho = f\,|\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z|, \tag{2.161}$$

oder noch kürzer:

$$\rho = f\,dx\,dy\,dz. \tag{2.162}$$

Das Integral $Q(U) := \int_U \rho$ berechnet die gesamte im Raumgebiet U befindliche elektrische Ladungsmenge.

Bemerkung. In physikalischen Lehrbüchern wird meist die Größe f als die elektrische Ladungsdichte bezeichnet. Wir reservieren den Namen “Ladungsdichte” für die bedeutsamere (weil invariant erklärte) Größe ρ. Zur besseren Unterscheidung nennen wir f die Ladungsdichtefunktion.

Deutung des Dichteintegrals. Die Ladungsdichte ρ bestehe aus Ladungen q_i an den Orten p_i, also $\rho = \sum_i q_i p_i$. Dann ist

$$Q(U) = \int_U \rho = \sum_{i:\, p_i \in U} q_i\,. \tag{2.163}$$

Wir bilden also die Summe aller Ladungen q_i, die sich an Orten p_i innerhalb des Gebiets U befinden. (Beachte: Längeneinheiten und Volumenmessung gehen hier nicht ein!)

Beispiel 2: elektrische Erregung. Die elektrische Erregung (oder elektrische Flussdichte) D ist im E_3 eine ungerade 2-Form:

$$D = \sum_{i<j} D_{ij}\,[\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j\,; R] = \sum_{i<j} D_{ij}\,[\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i\,; L]. \tag{2.164}$$

Das Integral $\int_S D$ heißt der elektrische Fluss durch die Fläche S (mit äußerer Orientierung). Es gilt das Gauss’sche Gesetz:

$$\mathrm{d}D = \rho. \tag{2.165}$$

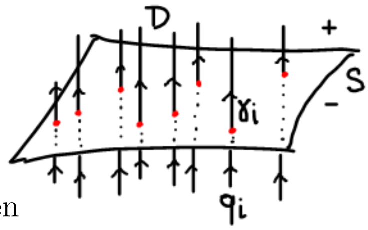
Durch Integration über ein beliebiges Raumgebiet $U \subset E_3$ (ohne Orientierung) folgt:

$$\int_{\partial U} D = \int_U \rho. \tag{2.166}$$

Die elektrische Ladung im Gebiet U ist also gleich dem elektrischen Fluss durch die Oberfläche ∂U. Hieraus resultiert die Vorstellung, dass elektrische Ladungen die Quellen des elektrischen Flusses sind. Insbesondere hat elektrischer Fluss die physikalische Dimension von Ladung.

Deutung des Flussintegrals. D bestehe aus Linienstücken γ_i mit Gewichtsfaktoren q_i der physikalischen Dimension von elektrischem Fluss oder Ladung, also $D = \sum q_i \gamma_i$. Dann ist

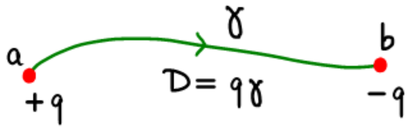
$$\int_S D = \sum_{i:\, \gamma_i \cap S} \pm q_i\,. \tag{2.167}$$



Die Summe läuft über alle Linienstücke γ_i, die S kreuzen. Jedes Linienstück γ_i trägt zur Summe mit seinem elektrischen Fluss $\pm q_i$ bei, und das Vorzeichen wird wie immer durch Orientierungsvergleich ermittelt.

Deutung (anschaulich) des Gauss’schen Gesetzes. Nun besprechen wir eine besonders simple Konfiguration, die das Gauss’sche Gesetz $\mathrm{d}D = \rho$ befriedigt. Sei dazu $D = q\gamma$, d.h. D bestehe aus einer einzigen Linie γ, die den elektrischen Fluss q trägt. Die Linie beginne im Punkt a und ende im Punkt b. In Formeln: $\partial\gamma = b - a$. Der Rand von γ besteht also aus dem Endpunkt b mit Gewicht $+1$ und dem Anfangspunkt a mit Gewicht -1. In dieser Situation verlangt das Gauss'sche Gesetz, dass eine Ladung $+q$ im Punkt a und eine Ladung $-q$ im Punkt b vorliegen muss: $\rho = q\,a + (-q)\,b$. In der Tat gilt hiermit

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}(q\gamma) = q(-\partial\gamma) = q\,a + (-q)\,b = \rho. \tag{2.168}$$



Warnung: dieses Bild illustriert das Gauss'sche Gesetz (nämlich: ist D bekannt, so erhält man die elektrische Ladungsdichte ρ aus $\mathrm{d}D = \rho$) und sonst nichts! Die elektrische Erregung eines realen Dipols mit Ladungen wie im Bild entsteht durch lineare Überlagerung einer Vielzahl elektrischer Flusslinien, die alle in der positiven Ladung des Dipols beginnen und in der negativen enden.

2.10.5 Zusammenfassende Bemerkungen

Die Differenzialoperatoren der Vektoranalysis im E_3 lassen sich in dem folgenden kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{tikzcd}
\text{Funktionen} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \text{1-Formen} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \text{2-Formen} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \text{3-Formen} \\
\text{Funktionen} \arrow[u, equal] \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \text{Vektorfelder} \arrow[u, "\mathcal{I}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \text{Vektorfelder} \arrow[u, "\mathcal{I}_2"'] \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \text{Funktionen} \arrow[u, "\mathcal{I}_3"']
\end{tikzcd} \tag{2.169}$$

Die Kommutativität des Diagramms bedeutet, dass es nur auf Anfangs- und Endraum ankommt, nicht aber auf den Weg von Abbildungen dazwischen. Wir haben also

$$\mathrm{d} = \mathcal{I}_1 \circ \mathrm{grad}, \quad \mathrm{d}\circ\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \circ \mathrm{rot}, \quad \mathrm{d}\circ\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 \circ \mathrm{div}. \tag{2.170}$$

Die generelle Regel

$$\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0 \tag{2.171}$$

ergibt speziell:

$$\mathrm{div}\circ\mathrm{rot} = 0, \quad \mathrm{rot}\circ\mathrm{grad} = 0. \tag{2.172}$$

Mit der Deutung der äußeren Ableitung als Randoperator hat die Regel $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$ eine anschauliche Deutung: "der Rand vom Rand ist immer Null".

Zum Schluss präsentieren wir jetzt noch eine Verfeinerung des obigen Diagramms. Die erste Zeile gibt es genau gesagt zweimal (für ungerade wie für gerade Formen). Dementsprechend gibt es auch die zweite Zeile zweimal:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Funktionen} & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \text{Funktionen} \\
\text{(skalar)} & & \text{(polar)} & & \text{(axial)} & & \text{(pseudoskalar)} \\
\phi_e & & \vec{E} & & \vec{B} & & \rho_m
\end{array} \tag{2.173}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Funktionen} & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\mathrm{div}} & \text{Funktionen} \\
\text{(pseudoskalar)} & & \text{(axial)} & & \text{(polar)} & & \text{(skalar)} \\
\phi_m & & \vec{H} & & \vec{D} & & \rho_e
\end{array} \tag{2.174}$$

Erläuterungen. Sei $\pi: E_3 \to E_3$ eine Raumspiegelung, also eine Spiegelung z.B. am Koordinatenursprung o :

$$\pi(p) = \pi(o + (p - o)) = o - (p - o). \tag{2.175}$$

Eine (skalare) Funktion $f: E_3 \to \mathbb{R}$ transformiert sich (wir benützen die Notation $f \mapsto \pi^* f$) unter π einfach durch Spiegelung des Arguments:

$$(\pi^* f)(p) = f(\pi(p)). \tag{2.176}$$

Hingegen erleidet eine pseudoskalare Funktion f einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel:

$$(\pi^* f)(p) = -f(\pi(p)). \tag{2.177}$$

Ein physikalisches Beispiel für eine pseudoskalare Funktion wäre die magnetische Ladungsdichtefunktion (wenn es denn magnetische Ladungen gäbe). Magnetische Ladungen (wenn sie existierten) würden kein positives oder negatives Vorzeichen (wie elektrische Ladungen) tragen, sondern wären rechtshändig oder linkshändig. Unter Raumspiegelung haben wir:

$$\text{rechtshändig} \mapsto \text{linkshändig} = -\text{rechtshändig}\,. \tag{2.178}$$

Eine ähnliche Unterscheidung hat man für Vektorfelder zu treffen. Unter einer Raumspiegelung wechseln polare Vektoren ihr Vorzeichen:

$$(\pi^* \vec{E})(p) = -\vec{E}(\pi(p)), \tag{2.179}$$

axiale Vektoren hingegen tun dies nicht:

$$(\pi^* \vec{B})(p) = +\vec{B}(\pi(p)). \tag{2.180}$$

Ganz zum Schluss kommt jetzt noch eine Zusammenfassung der Integralsätze der Vektoranalysis. Man sagt, dass k-Formen mit k-dimensionalen Flächenstücken über die Operation der Integration gepaart sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Funktionen} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \text{1-Formen} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \text{2-Formen} & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \text{3-Formen} \\
\otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes \\
\text{Punkte} & \xleftarrow{\partial} & \text{Kurven} & \xleftarrow{\partial} & \text{Flächen} & \xleftarrow{\partial} & \text{Gebiete} \\
\Big\downarrow \int & & \Big\downarrow \int & & \Big\downarrow \int & & \Big\downarrow \int \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{array} \tag{2.181}$$

Es gilt der Allgemeine Stokes'sche Satz:

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega. \tag{2.182}$$

Im Vektorkalkül spaltet er sich in drei spezielle Sätze auf:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial\gamma} f \equiv f(b) - f(a) \qquad (\partial\gamma = b - a), \\
\int_\Sigma \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d^2\vec{n} &= \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r}\,, \\
\int_U \operatorname{div} \vec{D}\, dx\, dy\, dz &= \int_{\partial U} \vec{D} \cdot d^2\vec{n}\,.
\end{aligned} \tag{2.183}$$