1 Vektorräume

1.1 Gruppen (Definition)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G, auf der eine Verknüpfung (kurz: Produkt)

$$\circ: \ G \times G \to G \ , \quad (g,h) \mapsto g \circ h \ ,$$

erklärt ist mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Assoziativität:

$$\forall g,h,k \in G: \quad (g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k) \ .$$

(ii) Existenz eines neutralen Elements e :

$$\forall g \in G: \quad g \circ e = g = e \circ g \ .$$

(iii) Existenz eines Inversen:

$$\forall g \in G: \quad \exists h \in G: \quad g \circ h = e = h \circ g.$$

Eine Gruppe heißt kommutativ, falls gilt: $g \circ h = h \circ g$ (für alle $g, h \in G$).

Bemerkung. Aus den Axiomen folgt, dass das neutrale Element und das Inverse eindeutig sind. Das zu g inverse Element wird in der Regel mit g^{-1} bezeichnet.

Beispiel 1. Die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ mit der gewöhnlichen Multiplikation $x \circ y \equiv x \cdot y$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe $(\mathbb{R}_+ \, , \cdot)$ mit neutralem Element $e = 1$ und Inversem $x^{-1} = 1/x$.

Beispiel 2. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition $\circ \equiv +$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe $(\mathbb{R} \, , +)$ mit neutralem Element $e = 0$. Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element ist $-x$.

1.2 Reelle Vektorräume (Definition)

Ein (reeller) Vektorraum $(V, +; \mathbb{R} \, , \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe $(V, +)$ mit der zusätzlichen Struktur einer Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R} \times V \to V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v \ ,$$

die den folgenden Verträglichkeitsbedingungen genügt:

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v \ , \tag{1.1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \ , \tag{1.2}$$

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \ , \tag{1.3}$$

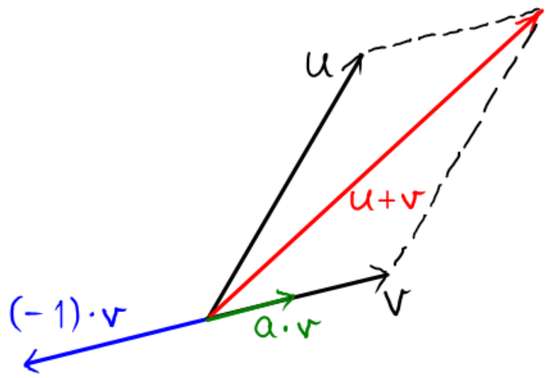
$$1 \cdot v = v \ , \tag{1.4}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$. Die Elemente von V heißen Vektoren. Gängige Schreibweisen sind:

$$u - v := u + (-v)\,, \qquad v/a := (1/a) \cdot v \qquad (a \neq 0).$$

Beispiel 1. $(\mathbb{R}\,, +; \mathbb{R}, \cdot)$, also $V = \mathbb{R}$.

Beispiel 2. Die Menge aller Translationen (oder Verschiebungsvektoren) im Raum bildet einen Vektorraum.



Beispiel 3. Sei M eine Menge und V ein Vektorraum. Dann ist auch die Menge aller Abbildungen

$$f: \; M \to V, \quad x \mapsto f(x)\,,$$

mit der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ein Vektorraum.

1.3 Basis und Dimension

Eine Menge $\{v_1\,, v_2\,, \ldots, v_n\} \subset V$ von Vektoren eines Vektorraums V heißt linear unabhängig, falls für alle $a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0\,. \tag{1.5}$$

Andernfalls heißt die Menge linear abhängig. (Das Symbol $\cdot$ für die Skalarmultiplikation wird ab hier der Einfachheit halber meist unterdrückt.) Enthalten alle linear unabhängigen Mengen eines Vektorraums V nur endlich viele Vektoren, so heißt V endlich-dimensional. (In diesem Abschnitt werden wir nur endlich-dimensionale Vektorräume betrachten).

Ist eine Menge von Vektoren $\{v_1\,, v_2\,, \ldots, v_n\}$ von V linear unabhängig, wird aber durch Hinzunahme eines jeden weiteren Vektors linear abhängig, so heißt diese Menge eine Basis von V. Jede Basis von V enthält die gleiche Zahl von Vektoren (ohne Beweis). Diese wohlbestimmte Zahl heißt die Dimension von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Sei nun $u \in V$ ein beliebiger Vektor und $B = \{v_1\,, v_2\,, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann existieren Zahlen $a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, b$ (nicht alle Null), so dass gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + bu = \mathbf{0}\,.$$

Ohne Verlust dürfen annehmen, dass u nicht der Nullvektor ist. Dann muss $b \neq 0$ gelten, denn andernfalls wäre B linear abhängig und somit keine Basis. Folglich können wir durch b dividieren und erhalten

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \qquad (c_i = -a_i/b). \tag{1.6}$$

Jeder Vektor lässt sich also als sog. Linearkombination der Vektoren $v_1\,,\ldots\,,v_n$ der Basis schreiben. Die Zahlen $c_1\,,c_2\,,\ldots\,,c_n$ heißen die Komponenten von u bzgl. der Basis B. Sie sind eindeutig bestimmt, denn ist $c_1',\ldots,c_n'$ ein zweiter Satz von Komponenten für u, dann ergibt die Subtraktion der zwei Linearkombinationen $u=\sum c_i v_i$ und $u=\sum c_i' v_i$ die Beziehung

$$\mathbf{0}=(c_1-c_1')v_1+\ldots(c_n-c_n')v_n,$$

und aus der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $v_1,\ldots,v_n$ folgt $c_i-c_i'=0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Als Kurzschreibweise vereinbaren wir

$$u=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}_B\,,\qquad B=\{v_1\,,\ldots\,,v_n\}\,. \tag{1.7}$$

Der Index B wird fortgelassen, wenn es keine Missverständnisse geben kann, welche Basis B gemeint ist.

1.4 Dualer Vektorraum

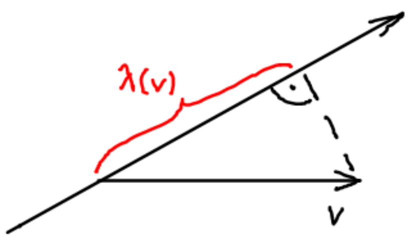
Sei V ein Vektorraum. Unter einer Linearform $\lambda:\ V\to\mathbb{R}$ versteht man eine Funktion $v\mapsto\lambda(v)$ mit den Eigenschaften

$$\lambda(u+v)=\lambda(u)+\lambda(v)\,, \tag{1.8}$$

$$\lambda(a\cdot v)=a\,\lambda(v)\,, \tag{1.9}$$

für alle $u,v\in V$ and $a\in\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Operation der Orthogonalprojektion auf eine Raumachse ist eine Linearform. □



Die Menge alle Linearformen $\lambda:\ V\to\mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum bezüglich der Addition

$$(\lambda+\mu)(v):=\lambda(v)+\mu(v) \tag{1.10}$$

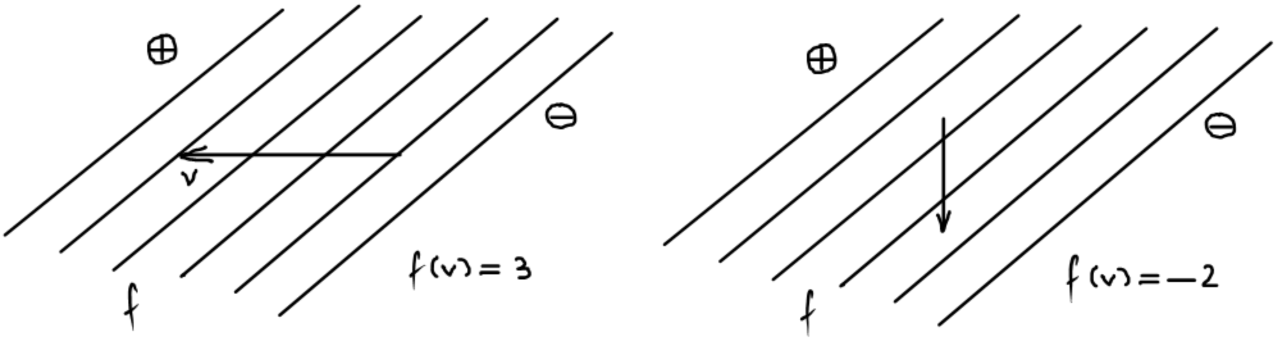
und der Skalarmultiplikation

$$(a\cdot\lambda)(v):=\lambda(a\cdot v)\,. \tag{1.11}$$

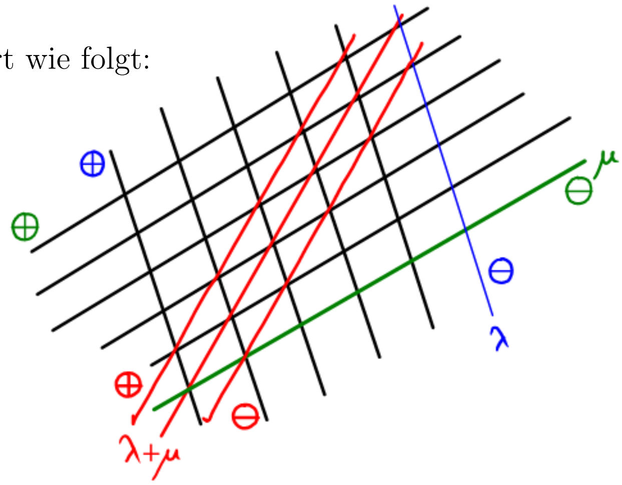
Dieser Vektorraum wird der zu V duale Vektorraum genannt und mit V^* bezeichnet.

Beispiel. Sei V der Vektorraum der Translationen im Raum. (Wie üblich visualisieren wir solche Translationen als Verschiebungsvektoren.) Den Dualraum V^* können wir dann als den Raum aller homogenen (also räumlich konstanten) Kraftfelder interpretieren. Diese Interpretation funktioniert, weil in einem homogenen Kraftfeld f der Verschiebung eines Testkörpers um den

Vektor v eine Energieänderung zugeordnet ist, die wir mit dem Wert $f(v)$ identifizieren können. (Genau gesagt meinen wir mit $f(v)$ die Zunahme der kinetischen Energie oder, was bei erhaltener Gesamtenergie dasselbe ist, die Abnahme der potenziellen Energie.) Die Visualisierung des Kraftfeldes f erfolgt über seine Äquipotenzialflächen. Für ein homogenes Kraftfeld bilden diese eine (homogene und polarisierte) Schar von parallelen Ebenen. Die Energieänderung $f(v)$ ermittelt man als die (vorzeichenbehaftete) Zahl der von v gekreuzten Äquipotenzialflächen.



Die Addition funktioniert wie folgt:



[Ausblick Wellenphysik: Wellen“vektor” als Linearform.]

1.5 Dualbasis

Sei $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Basis des reellen Vektorraums V mit der Dimension n. Unter der zugehörigen Dualbasis des dualen Vektorraums V^* versteht man die Menge der Linearformen $B^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ mit der Eigenschaft

$$\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad (i, j = 1, \dots, n). \tag{1.12}$$

(Die Dualbasis B^* wird durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.)

Beispiel.