Beim Rechnen mit Linearformen in V^* zusammen mit Vektoren in V ist es von Vorteil, mit der Dualbasis B^* zu einer gewählten Basis B von V zu arbeiten. Hierzu einige Erläuterungen.

Wie jede Basis von V^* kann die Dualbasis $B^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ benutzt werden, um eine beliebige Linearform λ als Linearkombination zu schreiben:

$$\lambda = \lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2 + \ldots + \lambda_n\vartheta_n \,. \tag{1.13}$$

Die Komponenten λ_i von λ werden in Kurzschreibweise auch als Zeilenvektor zusammengefasst:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{B^*} \,. \tag{1.14}$$

In dieser Schreibweise gilt insbesondere

$$\vartheta_1 = (1, 0, \ldots, 0)_{B^*} \,, \quad \vartheta_2 = (0, 1, \ldots, 0)_{B^*} \,, \quad \ldots, \quad \vartheta_n = (0, 0, \ldots, 1)_{B^*} \,. \tag{1.15}$$

Nun erinnern wir an die Konvention, dass die Komponenten von $v \in V$ (bzgl. B) einen Spaltenvektor bilden:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \,.$$

Bei Spezialisierung auf die Basisvektoren nimmt diese Darstellung als Spaltenvektor eine besonders einfache Form an:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B \,, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B \,, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_B \,. \tag{1.16}$$

Aus der definierenden Eigenschaft $\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij}$ der Dualbasis B^* folgt, dass die Anwendung von ϑ_i auf einen Vektor $v \in V$ die entsprechende Komponente von v (bzgl. B) ergibt:

$$v_i = \vartheta_i(v) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.17}$$

Umgekehrt erhält man die i-te Komponente λ_i der Linearform λ durch Einsetzen des i-ten Basisvektors:

$$\lambda_i = \lambda(e_i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.18}$$

Für eine beliebige Linearform λ und einen beliebigen Vektor v hat man dann

$$\lambda(v) = \sum_i \lambda_i \vartheta_i \left(\sum_j v_j e_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i v_j \, \vartheta_i(e_j) = \sum_i \lambda_i v_i \,. \tag{1.19}$$

Dieser Ausdruck lässt sich prägnant mit der Regel “Zeile mal Spalte” umschreiben:

$$\lambda(v) = \sum_i \lambda_i v_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{B^*} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \,. \tag{1.20}$$

1.6 Basiswechsel

Was passiert nun, wenn wir die Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ wechseln, also durch eine andere Basis $\tilde{B} = \{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ ersetzen? Es gibt mehrere Möglichkeiten des Vorgehens (die am Ende auf das Gleiche hinauslaufen). Hier gehen wir so vor, dass wir die alte Basis durch die neue ausdrücken:

$$e_j = \sum_i \tilde{e}_i T_{ij} \,. \tag{1.21}$$

Da es sich bei der neuen Basis $\tilde{B}$ wieder um eine Basis handelt, sind die Koeffizienten $T_{ij} \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Sie lassen sich in Form einer quadratischen Matrix anordnen:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \ldots & T_{nn} \end{pmatrix} . \tag{1.22}$$

Nun ist jeder Vektor unabhängig von der Wahl der Basis. Es gilt also

$$v = \sum_j v_j e_j = \sum_i \tilde{v}_i \tilde{e}_i \,, \tag{1.23}$$

wobei mit $\tilde{v}_i$ die Komponenten von v bezüglich der neuen Basis $\tilde{B} = \{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ gemeint sind. Durch Einsetzen der Beziehung (1.21) entsteht

$$v = \sum_{j,i} v_j \tilde{e}_i T_{ij} \,.$$

Da die Komponenten $\tilde{v}_i$ eindeutig bestimmt sind, liefert der Koeffizientenvergleich mit (1.23) das Ergebnis

$$\tilde{v}_i = \sum_j T_{ij} v_j \,. \tag{1.24}$$

In der alternativen Schreibweise mit Matrizen und Spaltenvektoren sieht das wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \ldots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B . \tag{1.25}$$

(Hier wird die Multiplikationsregel für Matrizen und Spaltenvektoren als bekannt vorausgesetzt.)

Wir wenden uns jetzt den Linearformen zu. Für die Dualbasis $\tilde{B} = \{\tilde{\vartheta}_1, \ldots, \tilde{\vartheta}_n\}$ gilt wieder $\tilde{\vartheta}_i(\tilde{e}_j) = \delta_{ij}$. Aus Gleichung (1.21) und dem Ansatz $\vartheta_i = \sum_l S_{il} \tilde{\vartheta}_l$ folgt hiermit

$$\delta_{ij} = \vartheta_i(e_j) = \sum_k \vartheta_i(\tilde{e}_k) T_{kj} = \sum_{k,l} S_{il} \tilde{\vartheta}_l(\tilde{e}_k) T_{kj} = \sum_k S_{ik} T_{kj} \,. \tag{1.26}$$

Die Matrix der Koeffizienten S_{ik} ist also invers zur Matrix der Koeffizienten T_{kj}:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & \ldots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \ldots & T_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} . \tag{1.27}$$

(Hier wird die Multiplikationsregel für Matrizen als bekannt vorausgesetzt.) Wir schreiben für diesen Zusammenhang auch $S_{ij} = (T^{-1})_{ij}$ oder $S = T^{-1}$.

Um die Komponenten einer Linearform λ in die neue Basis umzurechnen, benützen wir die Gleichung (1.24) in Kombination mit der Tatsache, dass $\lambda(v)$ basisunabhängig erklärt ist:

$$\lambda(v) = \sum_j \lambda_j v_j = \sum_i \tilde{\lambda}_i \tilde{v}_i = \sum_{i,j} \tilde{\lambda}_i T_{ij} v_j \,. \tag{1.28}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $\lambda_j = \sum_i \tilde{\lambda}_i T_{ij}$. Um nach $\tilde{\lambda}_i$ aufzulösen, multiplizieren wir mit S_{jk}, summieren über j und verwenden die Variante $\sum_j T_{ij} S_{jk} = \delta_{ik}$ von Gleichung (1.26). So entsteht

$$\tilde{\lambda}_i = \sum_j \lambda_j S_{j\,i} \,. \tag{1.29}$$

Resumée. Unter einem Basiswechsel $e_j = \sum_i \tilde{e}_i T_{ij}$ ändern sich die Komponenten eines Vektors v bzw. einer Linearform λ wie folgt:

$$\tilde{v}_i = \sum_j T_{ij} v_j \,, \quad \tilde{\lambda}_i = \sum_j \lambda_j (T^{-1})_{j\,i} \,. \tag{1.30}$$

In Worten: die als Spaltenvektor arrangierten Komponenten von v werden durch (Links-)Multiplikation mit der Matrix T transformiert. Hingegen werden die als Zeilenvektor arrangierten Komponenten von λ durch Rechtsmultiplikation mit der inversen Matrix T^{-1} transformiert:

$$(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} (T^{-1})_{11} & \ldots & (T^{-1})_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (T^{-1})_{n1} & \ldots & (T^{-1})_{nn} \end{pmatrix} . \tag{1.31}$$

Bemerkung. Die invariante (d.h. basisunabhängige) Paarung

$$V^* \times V \to \mathbb{R}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$$

zwischen Linearformen und Vektoren ist fundamental für sehr viele Beziehungen in der Physik. Im Beispiel von Abschnitt 1.4 haben wir bereits die Paarung

Kraft × Verschiebung → Energie(änderung)

kennengelernt. Weitere Beispiele von diesem Typ sind

Kraft × Geschwindigkeit → Leistung,
Impuls × Geschwindigkeit → kinetische Energie (×2),
Drehimpuls × Winkelgeschwindigkeit → Rotationsenergie (×2),
elektrische Feldstärke × Verschiebung → elektrische Spannung,
elektrische Feldstärke × Stromdichte → Leistungsdichte.

Für diese Paarungen spielt die Geometrie des Raumes keine Rolle.

1.7 Lineare Abbildungen

Definition. Sei $A: U \to V$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen U, V. Die Abbildung A heißt linear, falls für alle $u, u' \in U$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(u+u') = A(u) + A(u')\,, \quad A(b \cdot u) = b \cdot A(u)\,. \tag{1.32}$$

Für eine lineare Abbildung L verwenden wir die vereinfachte Notation $L(u) \equiv Lu$.

Beispiel. Wählen wir in der obigen Definition $V = \mathbb{R}$, betrachten wir also lineare Abbildungen $L: U \to \mathbb{R}$, dann handelt es sich um die in Abschnitt 1.4 eingeführten Linearformen. □

Die linearen Abbildungen $L: U \to V$ bilden selbst wieder einen Vektorraum mit der durch $(A+B)(u) = A(u)+B(u)$ erklärten Addition. Dieser Vektorraum wird mit $\mathrm{Hom}(U, V)$ bezeichnet. Für $U = V$ schreibt man $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}(V)$. Für $V = \mathbb{R}$ haben wir $\mathrm{Hom}(U, \mathbb{R}) = U^*$.

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung.
Sei $L : U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen U und V, also $L \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Durch die Wahl von Basen $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ für U und $C = \{f_1, \ldots, f_m\}$ für V wird L eine Matrix (L_{ij}) zugeordnet. Dies geschieht durch

$$Le_j = \sum_i f_i L_{ij}\,, \tag{1.33}$$

oder mit Hilfe der Dualbasis $C^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ durch

$$L_{ij} = \varphi_i(Le_j)\,. \tag{1.34}$$

Nun möchten wir wissen, was unter der linearen Transformation $u \mapsto Lu$ mit den Komponenten (bzgl. B bzw. C) des Vektors u passiert. Dazu schreiben wir u als Linearkombination $u = \sum_j u_j e_j$ and verwenden die Linearität der Abbildung:

$$Lu = L\left(\sum_j u_j e_j\right) = \sum_j u_j L(e_j) = \sum_{i,j} u_j e_i L_{ij}\,.$$

Folglich gilt

$$(Lu)_i = \varphi_i(Lu) = \sum_j L_{ij} u_j\,.$$

In der Schreibweise als Spaltenvektor haben wir

$$\begin{pmatrix} (Lu)_1 \\ \vdots \\ (Lu)_m \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \ldots & L_{mn} \end{pmatrix}_{C,B} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_B .$$

Werden zwei lineare Abbildungen $L: U \to V$ und $K: V \to W$ hintereinander ausgeführt,

$$KL \;:\quad U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{K} W$$

so erhält man wieder eine lineare Abbildung $KL: U \to W$. (Bezüglich dieser Produktoperation bilden die invertierbaren linearen Abbildungen $g \in \mathrm{End}(V)$ eine Gruppe namens $\mathrm{GL}(V)$ mit der identischen Abbildung $v \mapsto v$ als neutralem Element.) Wichtig ist nun, dass die Zuordnung von linearen Abbildungen zu Matrizen die Gruppenstruktur erhält. In anderen Worten: sind B, C bzw. D Basen für U, V bzw. W, und sind (K_{dc}), (L_{cb}) und $((KL)_{db})$ die entsprechenden Matrizen, dann gilt

$$(KL)_{db} = \sum_c K_{dc} L_{cb} \,. \tag{1.35}$$

Man kann also die Matrix der Hintereinanderausführung KL direkt bilden, oder die Matrizen von K und L individuell bilden und sie dann als Matrizen multiplizieren (wobei die Reihenfolge der Multiplikation gleich bleibt) – das Ergebnis ist dasselbe.

1.8 Transponierte einer linearen Abbildung

Zu jeder linearen Abbildung $L: U \to V$ existiert die transponierte (oder kanonisch adjungierte) Abbildung, L^T. Sie vermittelt zwischen den dualen Vektorräumen (also U^* und V^*) und ist erklärt durch

$$L^T: V^* \to U^*, \quad (L^T\lambda)(u) = \lambda(Lu). \tag{1.36}$$

Ein wichtiger Spezialfall sind Abbildungen $L: V \to V^*$ zwischen einem Vektorraum und seinem eigenen Dualraum. Wegen $(V^*)^* = V$ (für $\dim V < \infty$) ist die Transponierte von L dann wieder eine lineare Abbildung $L^T: V \to V^*$.

Definition. Eine lineare Abbildung $L: V \to V^*$ heißt symmetrisch (bzw. schief-symmetrisch), falls gilt $L = L^T$ (bzw. $L = -L^T$).

Bemerkung. Für eine symmetrische lineare Abbildung $L: V \to V^*$ hat man

$$(Lv)(v') = (Lv')(v) \quad (\text{für alle } v, v' \in V), \tag{1.37}$$

für eine schief-symmetrische Abbildung gilt Entsprechendes mit geändertem Vorzeichen. Die einer symmetrischen Abbildung (durch Wahl einer Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$) zugeordnete Matrix (L_{ij}) hat die Eigenschaft

$$L_{ij} = (Le_i)(e_j) = (Le_j)(e_i) = L_{ji} \,. \tag{1.38}$$

Für eine schief-symmetrische Abbildung $L = -L^T$ hat man $L_{ij} = -L_{ji}$.

Beispiel 1. Der Massentensor eines Teilchens im anisotropen Medium ist eine symmetrische lineare Abbildung M, die der Geschwindigkeit v den entsprechenden Impuls p zuordnet:

$$M: v \mapsto p = Mv, \quad M = M^T. \tag{1.39}$$

Beispiel 2. Der Trägheitstensor (z.B. eines starren Körpers) ist eine symmetrische lineare Abbildung I, die die Winkelgeschwindigkeit~~en~~ ω in den entsprechenden Drehimpuls L transformiert:

$$I: \omega \mapsto L = I\omega, \quad I = I^T. \tag{1.40}$$

Beispiel 3. Der Leitfähigkeitstensor σ eines elektrisch leitenden Materials ist (in linearer Näherung) eine lineare Abbildung, die elektrische Feldstärken E in elektrische Stromdichten j transformiert:

$$\sigma : \; E \mapsto j = \sigma E. \tag{1.41}$$

Es gilt die sog. Onsager-Relation $\sigma(B)^T = \sigma(-B)$ (mit B der magnetischen Feldstärke).

1.9 Affiner Raum

Der Begriff des Vektorraums an sich ergibt noch kein befriedigendes Modell für den (physikalischen) Raum. Deshalb nehmen wir folgende Erweiterung vor.

Definition. Unter einem affinen Raum $(M, V, +)$ versteht man eine Menge M von Punkten zusammen mit einem Vektorraum V und einer Addition

$$M \times V \to M, \qquad (p, v) \mapsto p + v \;,$$

mit den Eigenschaften:

(i) Es gilt eine Variante des Assoziativgesetzes:

$$p + (u + v) = (p + u) + v$$

für alle $p \in M$ und $u\,, v \in V$.

(ii) Zu jedem Paar $(p\,, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v\,$.

Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den Differenzvektor zu $(p\,, q)$.

Beispiel. Die Menge aller Punkte auf einer Geraden zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen längs der Geraden bildet eine 1-dimensionalen affinen Raum. □

Definition. Ein affines Koordinatensystem $\{p_0\,; e_1\,, \ldots, e_n\}$ besteht aus einem ausgezeichneten Punkt p_0 (dem "Koordinatenursprung") zusammen mit einer Basis $\{e_1\,, \ldots, e_n\}$ von V. Die affinen Koordinaten $x_i : \; M \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ definiert man durch

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - p_0) \;,$$

wobei $\{\vartheta_1\,, \ldots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis zu $\{e_1\,, \ldots, e_n\}$ ist. Den Ausdruck

$$p = p_0 + x_1(p)\, e_1 + \ldots + x_n(p)\, e_n$$

nennen wir die Koordinatendarstellung des Punktes p. Man beachte, dass gilt

$$x_i(p + av) = x_i(p) + a\, \vartheta_i(v) \qquad (p \in M\,,\; a \in \mathbb{R}\,,\; v \in V).$$