1.7 Lineare Abbildungen

Definition. Sei $A: U \to V$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen U, V. Die Abbildung A heißt linear, falls für alle $u, u' \in U$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(u+u') = A(u) + A(u')\,, \quad A(b\cdot u) = b\cdot A(u)\,. \tag{1.32}$$

Für eine lineare Abbildung L verwenden wir die vereinfachte Notation $L(u) \equiv Lu$.

Beispiel. Wählen wir in der obigen Definition $V = \mathbb{R}$, betrachten wir also lineare Abbildungen $L: U \to \mathbb{R}$, dann handelt es sich um die in Abschnitt 1.4 eingeführten Linearformen. □

Die linearen Abbildungen $L: U \to V$ bilden selbst wieder einen Vektorraum mit der durch $(A+B)(u) = A(u)+B(u)$ erklärten Addition. Dieser Vektorraum wird mit $\mathrm{Hom}(U,V)$ bezeichnet. Für $U = V$ schreibt man $\mathrm{Hom}(V,V) = \mathrm{End}(V)$. Für $V = \mathbb{R}$ haben wir $\mathrm{Hom}(U,\mathbb{R}) = U^*$.

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung.
Sei $L: U \to V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen U und V, also $L \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Durch die Wahl von Basen $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ für U und $C = \{f_1, \ldots, f_n\}$ für V wird L eine Matrix (L_{ij}) zugeordnet. Dies geschieht durch

$$Le_j = \sum_i f_i L_{ij}\,, \tag{1.33}$$

oder mit Hilfe der Dualbasis $C^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ durch

$$L_{ij} = \varphi_i(Le_j)\,. \tag{1.34}$$

Nun möchten wir wissen, was unter der linearen Transformation $u \mapsto Lu$ mit den Komponenten (bzgl. B bzw. C) des Vektors u passiert. Dazu schreiben wir u als Linearkombination $u = \sum_j u_j e_j$ and verwenden die Linearität der Abbildung:

$$Lu = L\left(\sum_j u_j e_j\right) = \sum_j u_j L e_j = \sum_{i,j} u_j f_i L_{ij}\,.$$

Folglich gilt

$$(Lu)_i = \varphi_i(Lu) = \sum_j L_{ij} u_j\,. \tag{1.35}$$

In der Schreibweise als Spaltenvektor haben wir

$$\begin{pmatrix} (Lu)_1 \\ \vdots \\ (Lu)_n \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} L_{11} & \ldots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \ldots & L_{nm} \end{pmatrix}_{C,B} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}_B\,. \tag{1.36}$$

Verkettung. Werden zwei lineare Abbildungen $L: U \to V$ und $K: V \to W$ hintereinander ausgeführt,

$$KL \;:\; U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{K} W, \tag{1.37}$$

so erhält man wieder eine lineare Abbildung $KL: U \to W$. (Bezüglich dieser Produktoperation bilden die invertierbaren linearen Abbildungen $g \in \mathrm{End}(V)$ eine Gruppe namens $\mathrm{GL}(V)$ mit der identischen Abbildung $v \mapsto v$ als neutralem Element.) Wichtig ist nun, dass die Zuordnung von linearen Abbildungen zu Matrizen die Gruppenstruktur erhält. In anderen Worten: sind B, C bzw. D Basen für U, V bzw. W, und sind (K_{dc}), (L_{cb}) und $((KL)_{db})$ die entsprechenden Matrizen, dann gilt

$$(KL)_{db} = \sum_c K_{dc} L_{cb} \,. \tag{1.38}$$

Man kann also die Matrix der Hintereinanderausführung KL direkt bilden, oder die Matrizen von K und L individuell bilden und sie dann als Matrizen multiplizieren (wobei die Reihenfolge der Multiplikation gleich bleibt) – das Ergebnis ist dasselbe (Beweis als Übungsaufgabe).

Merkregel. Die Matrix einer linearen Abbildung $L: U \to V$ bzgl. der Basen $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ von U und $C = \{f_1, \ldots, f_n\}$ von V erhält man, indem man die Spalten der Matrix mit den Spaltenvektoren der Bilder der Basisvektoren befüllt. Genau gesagt kommt in die j-te Spalte der Spaltenvektor mit (vertikal angeordneten) Komponenten $(Le_j)_1, \ldots, (Le_j)_n$.

Definition. Eine lineare Abbildung $L: U \to V$ heißt *injektiv*, wenn das Bild $Lu \in V$ eines jeden von Null verschiedenen Vektors $u \in U$ wieder von Null verschieden ist; oder anders ausgedrückt, wenn gilt: $Lu = \mathbf{0}_V \Rightarrow u = \mathbf{0}_U$. Eine lineare Abbildung $L: U \to V$ heißt *surjektiv*, wenn jeder Vektor in V das Bild (unter L) eines Vektors U ist; in Formeln: $v \in V \Rightarrow \exists u \in U: \; Lu = v$. Eine lineare Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt ein Isomorphismus. (Im allgemeinen Fall von Abbildungen zwischen beliebigen Mengen spricht man von bijektiv.)

Mitteilung. Ein Isomorphismus $L: U \to V$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen kann nur dann existieren, wenn U und V die gleiche Dimension haben. Ein Isomorphismus $L: U \to V$ besitzt ein eindeutiges Inverses $L^{-1}: V \to U$.

1.8 Transponierte einer linearen Abbildung

Zu jeder linearen Abbildung $L: U \to V$ existiert die transponierte (oder kanonisch adjungierte) Abbildung, L^T. Sie vermittelt zwischen den dualen Vektorräumen (also U^* und V^*) und ist erklärt durch

$$L^T: V^* \to U^*, \quad (L^T\lambda)(u) = \lambda(Lu). \tag{1.39}$$

Die Situation wird durch das folgende Diagramm einprägsam ausgedrückt:

$$\begin{aligned} &U \xrightarrow{L} V, \\ &U^* \xleftarrow{L^T} V^*. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Die Matrizen von L und L^T (bzgl. passender Basen) hängen in einfacher Weise miteinander zusammen. Wie zuvor arbeiten wir mit Basen $B = \{e_1, \ldots e_m\}$ für U und $C = \{f_1, \ldots, f_n\}$ für V. Die entsprechenden Dualbasen seien $B^* = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$ und $C^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Die Matrix von L is bekanntlich (L_{ij}) mit $L_{ij} = \varphi_i(Le_j)$. Nach dem gleichen Prinzip (nämlich: L^T auf die Basislinearformen in C^* anwenden und die Bildformen durch die Basis B^* ausdrücken) ergibt sich die

Matrix von L^T zu $((L^T)_{j\,i})$ mit

$$(L^T)_{j\,i} = (L^T\varphi_i)(e_j) = \varphi_i(Le_j).$$

Es gilt also

$$(L^T)_{j\,i} = L_{ij}\,, \tag{1.41}$$

oder in Matrixschreibweise (z.B. für $m < n$)

$$((L^T)_{j\,i}) = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{m1} & \dots & L_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ L_{1m} & \dots & L_{mm} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix}_{B^*,C^*}, \quad (L_{ij}) = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix}_{C,B}. \tag{1.42}$$

Ein wichtiger Spezialfall sind Abbildungen $L:\ V \to V^*$ zwischen einem Vektorraum und seinem eigenen Dualraum. Wegen $(V^*)^* = V$ (für $\dim V < \infty$) ist die Transponierte von L dann wieder eine lineare Abbildung $L^T:\ V \to V^*$.

Definition. Eine lineare Abbildung $L:\ V \to V^*$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch), falls gilt $L = L^T$ (bzw. $L = -L^T$).

Bemerkung. Für eine symmetrische lineare Abbildung $L:\ V \to V^*$ hat man

$$(Lv)(v') = (Lv')(v) \quad \text{(für alle } v, v' \in V\text{)}, \tag{1.43}$$

für eine schiefsymmetrische Abbildung gilt Entsprechendes mit geändertem Vorzeichen. Die einer symmetrischen Abbildung (durch Wahl einer Basis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$) zugeordnete Matrix (L_{ij}) hat die Eigenschaft

$$L_{ij} = (Le_i)(e_j) = (Le_j)(e_i) = L_{j\,i}\,. \tag{1.44}$$

Für eine schiefsymmetrische Abbildung $L = -L^T$ hat man $L_{ij} = -L_{j\,i}$.

Beispiel 1. Der Massentensor eines Teilchens im anisotropen Medium ist eine symmetrische lineare Abbildung M, die der Geschwindigkeit v den entsprechenden Impuls p zuordnet:

$$M:\ v \mapsto p = Mv, \quad M = M^T. \tag{1.45}$$

Beispiel 2. Der Trägheitstensor (z.B. eines starren Körpers) ist eine symmetrische lineare Abbildung I, die die Winkelgeschwindigkeit ω in den entsprechenden Drehimpuls L transformiert:

$$I:\ \omega \mapsto L = I\omega, \quad I = I^T. \tag{1.46}$$

Beispiel 3. Der Leitfähigkeitstensor σ eines elektrisch leitenden Materials ist (in linearer Näherung) eine lineare Abbildung, die elektrische Feldstärken E in elektrische Stromdichten j transformiert:

$$\sigma:\ E \mapsto j = \sigma E. \tag{1.47}$$

Es gilt die sog. Onsager-Relation $\sigma(B)^T = \sigma(-B)$ (mit B der magnetischen Feldstärke).

1.9 Alternierende 2-lineare Formen

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine alternierende 2-lineare Form ω auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \to \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) Schiefsymmetrie:

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u) \qquad (u, v \in V).$$

(ii) (Bi-)Linearität:

$$\omega(u + v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w) \qquad (u, v, w \in V),$$
$$\omega(a \cdot u, v) = a\, \omega(u, v) \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Der Vektorraum der alternierenden 2-linearen Formen auf V heißt $\mathrm{Alt}^2(V)$.

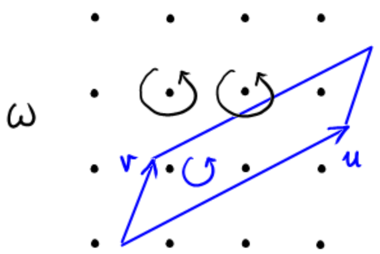
Bemerkung. Eine alternierende 2-lineare Form $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ ist im Grunde dasselbe wie eine schiefsymmetrische lineare Abbildung $S : V \to V^*$. Der Übergang von der einen zur anderen wird durch die folgende Formel geliefert:

$$Sv = \omega(v, \cdot\,). \tag{1.48}$$

Ausgehend von der alternierenden 2-linearen Form ω erhält man also $Sv \in V^*$ durch Einsetzen von $v \in V$ in das linke Argument von ω. Umgekehrt definiert eine schiefsymmetrische lineare Abbildung $S : V \to V^*$ eine alternierende 2-lineare Form $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ durch $\omega(u, v) = (Su)(v) = -(Sv)(u) = -\omega(v, u)$. $\square$

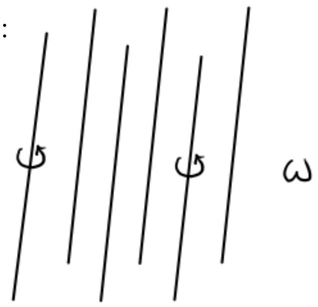
Ähnlich wie für Linearformen lässt sich auch für alternierende 2-lineare Formen ein anschauliches Modell angeben. Die Details des Modells hängen von der Raumdimension ab. (In d Dimensionen verwendet man eine Schar von Hyperebenen der Dimension $d - 2$.)

Modell $d = 2$. Ein Element $\omega \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ lässt sich als homogene Schar von Punkten mit Umlaufsinn visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u, v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Punkte von ω im Parallelogramm mit den Kanten u und v abzählt (inklusive Dezimalteil, durch Mitteln über alle translatierten Parallelogramme). Das Vorzeichen ist plus oder minus je nachdem, ob der Zirkulationssinn des Parallelogramms ("zuerst u, dann v") mit dem Umlaufsinn der Punkte von ω übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt.

Modell $d = 3$. Ein Element $\omega \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ lässt sich als homogene Schar von Geraden mit Zirkulationssinn visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u,v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Kreuzungspunkte der Geradenschar von ω mit dem von u und v aufgespannten Parallelogramm bestimmt. Das Vorzeichen ist wieder plus/minus je nachdem, ob der Zirkulationssinn übereinstimmt oder nicht.

Beispiel. Die Feldstärke B eines homogenen Magnetfelds im dreidimensionalen Raum ist eine alternierende 2-lineare Form $B \in \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$. Bewegt man ein stromtragendes Kabel mit (konstant gehaltenem) elektrischen Teststrom I über das von u und v aufgespannte Parallelogramm hinweg (Anfangskonfiguration: "zuerst u, dann v"; Endkonfiguration: "zuerst v, dann u"), dann ist die Arbeit $W = IB(u,v)$ aufzubringen.

1.10 Äußeres Produkt

Definition. Sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^*. Für zwei Linearformen $\lambda, \mu \in V^*$ erklärt man das äußere Produkt $\lambda \wedge \mu \in \mathrm{Alt}^2(V)$ durch

$$(\lambda \wedge \mu)(v,w) = \lambda(v)\,\mu(w) - \lambda(w)\,\mu(v)\,.$$

Visualisierung. Für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ behaupten wir, dass sich das äußere Produkt wie folgt anschaulich verstehen lässt. (i) Die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ entsteht durch Bilden des Durchschnitts der Ebenenscharen von λ und μ. (ii) Den Zirkulationssinn von $\lambda \wedge \mu$ bekommt man mit der Regel "gehe zuerst in Richtung des Pluspols von λ, biege dann in Richtung des Pluspols von μ ab".

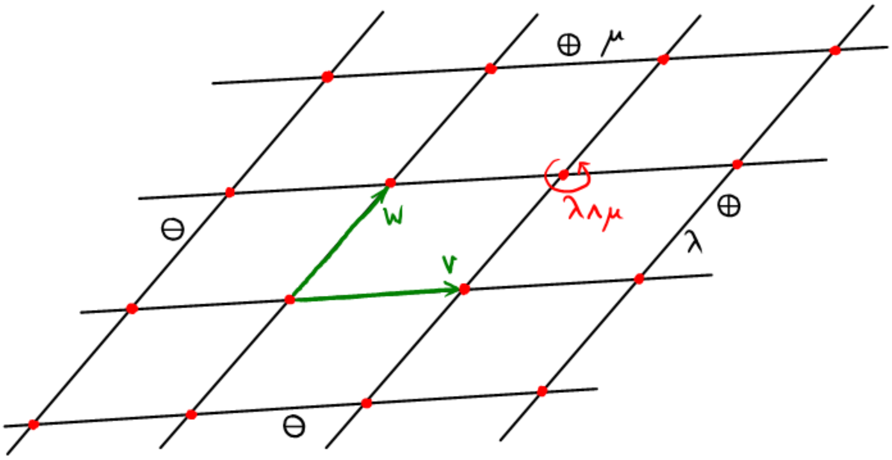
Beweis. Die Linearformen λ und μ seien linear unabhängig. (Andernfalls gilt $\lambda \wedge \mu = 0$.) Dann existiert ein linear unabhängiges Tripel von Vektoren u, v, w mit den Eigenschaften

$$\lambda(v) = \mu(w) = 1\,, \quad \lambda(w) = \mu(v) = \lambda(u) = \mu(u) = 0\,.$$

Durch einfache Rechnung erhält man

$$(\lambda \wedge \mu)(v,w) = 1\,, \quad (\lambda \wedge \mu)(w,u) = 0\,, \quad (\lambda \wedge \mu)(u,v) = 0\,.$$

Diese drei Gleichungen legen $\lambda \wedge \mu$ eindeutig fest. Die letzten zwei besagen, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zum Vektor u liegen muss. Da dieser Vektor seinerseits wegen $\lambda(u) = \mu(u) = 0$ parallel zu den Ebenenscharen von λ und μ liegt, ist die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zu den Schnittgeraden der Ebenenscharen von λ und μ. Aus $(\lambda \wedge \mu)(v,w) = 1$ folgt schließlich, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ nicht nur parallel zur Schnittgeradenschar der Linearformen λ, μ liegt, sondern sogar mit ihr identisch ist.



1.11 Normierter Vektorraum

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine Norm

$$\| \, \| : \; V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \| v \| ,$$

ist eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $\| v \| > 0$ für $v \neq 0$.

(ii) $\| a \cdot v \| = |a| \, \| v \|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

(iii) Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \| \qquad (u, v \in V).$$

Ein Vektorraum $(V, \| \; \|)$ mit Norm heißt normiert.

Beispiel 1. Für $V = \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion $a \mapsto |a|$ eine Norm.

Beispiel 2. Für einen Vektorraum V sei der Dualraum V^* mit einer Basis $B^* = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ ausgestattet. Dann hat man für jede reelle Zahl $p \geq 1$ eine Norm durch

$$\| v \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\vartheta_i(v)|^p \right)^{1/p} . \tag{1.49}$$

Sie heißt p-Norm. Für $p = 1$ entsteht die sog. Summennorm, für $p \to \infty$ die Maximumsnorm.

1.12 Euklidischer Vektorraum

In den bis Abschnitt 1.10 betrachteten Vektorräumen und ihren Dualräumen, insbesondere bei der Paarung zwischen Vektoren und Linearformen, traten metrische Beziehungen nicht auf. Diese Vektorräume waren sozusagen “unstrukturiert”, was die Geometrie angeht. Im Gegensatz hierzu existiert in sog. Euklidischen Vektorräumen die Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts. Dieses eröffnet die Möglichkeit der Längen- und Winkelmessung für Vektoren und Linearformen.

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einem Euklidischen Skalarprodukt auf V versteht man eine Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle \; : \quad V \times V \to \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Linearität:

$$\langle u, a\cdot v + b\cdot w\rangle = a\,\langle u,v\rangle + b\,\langle u,w\rangle \qquad (a\,,b\in\mathbb{R}\,;\; u,v,w\in V).$$

(ii) Symmetrie:

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \qquad (u,v\in V).$$

(iii) Positivität:

$$\langle v,v\rangle > 0 \quad \text{für alle } v\in V,\; v\neq \mathbf{0}\,.$$

Ein Vektorraum $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Euklidischem Skalarprodukt heißt Euklidisch. In einem Euklidischen Vektorraum existiert eine kanonische Norm, die Euklidische Norm. Sie ist definiert als die positive Wurzel des Euklidischen Skalarprodukts eines Vektors mit sich selbst:

$$\|\,v\,\| := +\sqrt{\langle v,v\rangle}\;. \tag{1.50}$$

Die Euklidische Norm $\|\,v\,\|$ eines Vektors v wird auch als seine Länge bezeichnet. Die Euklidische Norm spielt also die Rolle eines Längenmaßstabs.

Der Winkel $\angle(u,v)$ zwischen zwei Vektoren u, v ist erklärt durch

$$\cos\angle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|\,u\,\|\,\|\,v\,\|}\;. \tag{1.51}$$

Zwei Vektoren u,v mit der Eigenschaft $\langle u,v\rangle = 0$ heißen zueinander senkrecht oder orthogonal.

Definition. Unter einer Orthonormalbasis des Euklidischen Vektorraums V versteht man eine Basis $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ von V mit der Eigenschaft

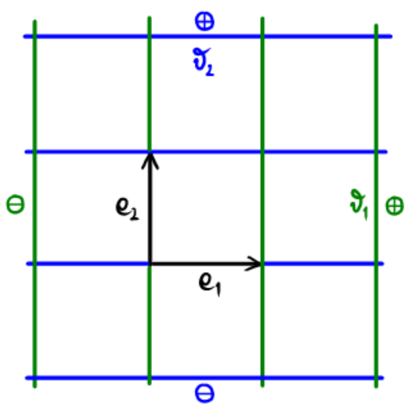
$$\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij} \qquad (i,j=1,\ldots,n)\;. \quad \square$$

Bemerkung. Bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ wird das Euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren $u=\sum u_i e_i$ und $v=\sum v_i e_i$ wie folgt ausgedrückt:

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i\,. \tag{1.52}$$

Die Dualbasis zu einer Orthonormalbasis $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ ist

$$B^* = \{\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n\}, \quad \vartheta_i = \langle e_i,\cdot\rangle\,. \tag{1.53}$$



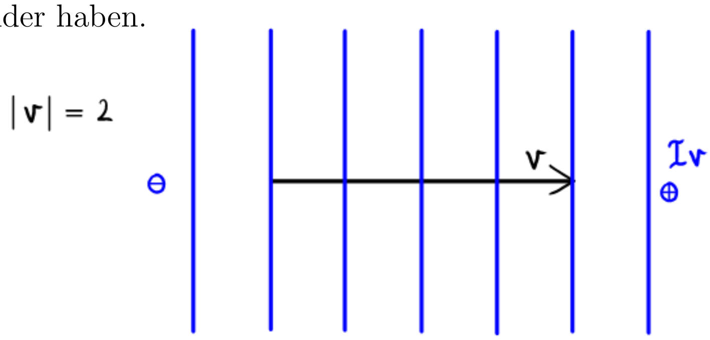
1.13 Euklidischer Isomorphismus: Vektoren → Linearformen

Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Jedem Vektor in V ist dann in kanonischer Weise eine Linearform in V^* zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt durch

$$\mathcal{I} : \quad V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle. \tag{1.54}$$

Vulgär gesprochen macht sie aus dem Vektor v das "hungrige Skalarprodukt" $\lambda = \langle v, \cdot \rangle$. Letzteres ist eine Linearform $\lambda : V \to \mathbb{R}$ mit Wert $\lambda(v') = \langle v, v' \rangle$.

Visualisierung. Wir verwenden das in Abschnitt 1.4 vorgestellte Modell von Linearformen auf V als Scharen von äquidistanten parallelen Ebenen der Dimension $\dim V - 1$ (oder Kodimension Eins). Für $\dim V = 2$ haben wir es mit Geraden zu tun, für $\dim V = 3$ mit gewöhnlichen (also zwei-dimensionalen) Ebenen, für $\dim V = d$ mit $(d-1)$-dimensionalen "Hyperebenen". Die Schar der Linearform $\mathcal{I}v = \langle v, \cdot \rangle$ zum Vektor v besteht aus den Ebenen, die auf v senkrecht stehen und den Abstand $1/|v|$ voneinander haben.



Infolge der Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts ist die Abbildung $\mathcal{I} : V \to V^*$ symmetrisch ($\mathcal{I}^T = \mathcal{I}$), und sie ist ein Isomorphismus, also linear und bijektiv. Insbesondere existiert die inverse Abbildung

$$\mathcal{I}^{-1} : V^* \to V \tag{1.55}$$

von Linearformen auf Vektoren. Mit Hilfe des inversen Isomorphismus $\mathcal{I}^{-1}$ lässt sich das Euklidische Skalarprodukt von V nach V^* übertragen:

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{V^*} = \langle \mathcal{I}^{-1}\lambda, \mathcal{I}^{-1}\mu \rangle_V \, . \tag{1.56}$$

Gemäß dieser Definition ist die Dualbasis $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ einer Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wieder eine Orthonormalbasis:

$$\langle \vartheta_i, \vartheta_j \rangle_{V^*} = \langle \mathcal{I}^{-1}\vartheta_i, \mathcal{I}^{-1}\vartheta_j \rangle_V = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \, . \tag{1.57}$$

Hierbei wurde die Relation $\vartheta_i = \mathcal{I}e_i$ benutzt.

Bemerkung. Mit dem inversen Isomorphismus $\mathcal{I}^{-1}$ lassen sich physikalische Größen, die archetypisch Linearformen sind, in Vektoren konvertieren. Insbesondere wird im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ jeder Kraftform $F \in V^*$ ein entsprechender Kraftvektor $\mathcal{I}^{-1}F \in V$ zugeordnet.