1.14 Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Wir kommen jetzt zu einer besonderen Operation, die nur im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum definiert werden kann.

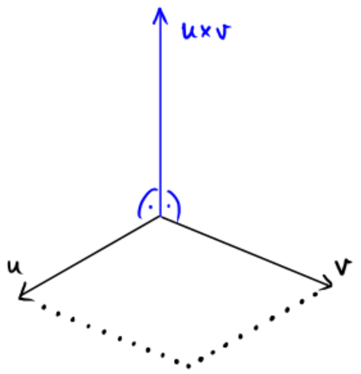
Definition. Sei V der dreidimensionale Euklidische Vektorraum ($V \simeq \mathbb{R}^3$), und sei $u, v \in V$ ein Paar von Vektoren. Unter dem Vektorprodukt von u mit v versteht man den Vektor $u \times v \in V$ mit den folgenden Eigenschaften. Sind u und v linear abhängig, dann ist $u \times v = 0$. Sind u und v linear unabhängig, dann gilt:

(i) $\langle u, u \times v\rangle = 0 = \langle u \times v, v\rangle$, d.h. $u \times v$ steht senkrecht auf beiden Faktoren u und v.

(ii) u, v, $u \times v$ (in dieser Reihenfolge) genügen der Rechte-Hand-Regel ("zuerst in Richtung des Daumens, dann des Zeigefingers, dann des Mittelfingers").

(iii) Die Länge von $u \times v$ ist $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \; |\sin\angle(u, v)|$.

Das Vektorprodukt $u \times v$ steht senkrecht auf der von u und v aufgespannten Ebene. Seine Länge ist gleich der Fläche des Parallelogramms mit den Kantenvektoren u und v.



Aus dieser Definition folgt (ohne dass wir hier einen Beweis geben), dass das Vektorprodukt $V \times V \to V$ schiefsymmetrisch und bilinear ist, also

$$u \times v = -\, v \times u, \quad u \times (av + bw) = a\, u \times v + b\, u \times w. \tag{1.58}$$

Für jede rechtshändige Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z verifiziert man sofort

$$e_x \times e_y = e_z\,, \quad e_y \times e_z = e_x\,, \quad e_z \times e_x = e_y\,. \tag{1.59}$$

Für zwei beliebige Vektoren $u = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z$ und $v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$ hat man dann

$$u \times v = (u_x v_y - v_x u_y) e_z + (u_y v_z - v_y u_z) e_x + (u_z v_x - v_z u_x) e_y\,. \tag{1.60}$$

In der Darstellung als Spaltenvektor gilt

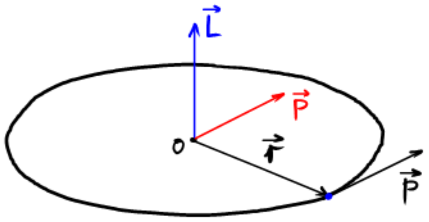
$$\begin{pmatrix} (u \times v)_x \\ (u \times v)_y \\ (u \times v)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - v_z u_x \\ u_x v_y - v_x u_y \end{pmatrix}. \tag{1.61}$$

Kritik. Die Operation des Vektorprodukts ist von einem fundamentalen Standpunkt aus gesehen eigentlich überflüssig und unpassend. Es "passt nicht", weil es unnötigerweise eine willkürlich gewählte Konvention, nämlich die Rechte-Hand-Regel, ins Spiel bringt, die den Naturgesetzen an sich fremd ist (Ausnahme: schwache Wechselwirkung). Trotzdem wird in physikalischen Lehrbüchern und Texten vom Vektorprodukt ausgiebig Gebrauch gemacht.

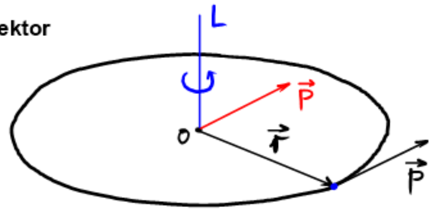
Beispiel. Einem Körper mit Impulsvektor $\vec{p}$ und Ortsvektor $\vec{r}$ (bzgl. eines ausgezeichneten Punktes, des “Koordinatenursprungs”; siehe Abschnitt 1.18) ordnet man in der traditionellen Physik-Didaktik seinen Drehimpulsvektor $\vec{L}$ zu durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{1.62}$$

Hierbei ist anzumerken, dass der Drehimpulsvektor kein Vektor im eigentlichen Sinn ist, denn sein Transformationsverhalten ist von dem eines Vektors verschieden: unter einer Raumspiegelung am Koordinatenursprung gehen Vektoren wie $\vec{r}$ und $\vec{p}$ in ihr Negatives über, während der Drehimpuls ungeändert bleibt. (Man nennt den Drehimpuls daher auch einen “axialen” Vektor.)



Die Beschreibung des Drehimpulses als Vektor bildet seine wahre Natur nicht getreu ab. Zutreffend ist das Bild als Drehachse mit Drehsinn. (Die Länge der Achse drückt dabei die Größe des Drehimpulses aus.)



1.15 Alternierende 3-lineare Formen und Spatprodukt

Sei V wieder ein Vektorraum. Eine alternierende 3-lineare Form $\rho \in \mathrm{Alt}^3(V)$ ist eine Abbildung

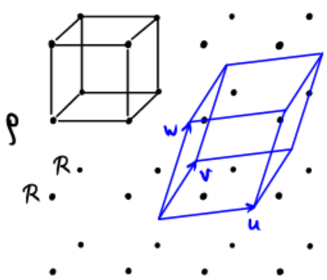
$$\rho : \; V \times V \times V \to \mathbb{R} \tag{1.63}$$

mit den Eigenschaften der totalen Schiefsymmetrie,

$$\rho(u,v,w) = -\rho(v,u,w) = +\rho(v,w,u) = -\rho(w,v,u) = +\rho(w,u,v) = -\rho(u,w,v) \;, \tag{1.64}$$

und Linearität in allen drei Argumenten.

Visualisierung. Ein Element $\rho \in \mathrm{Alt}^3(V)$ für $V \simeq \mathbb{R}^3$ lässt sich als homogene Schar (oder Gitter) von Punkten mit Händigkeit visualisieren. Der Wert $\rho(u,v,w)$ wird bestimmt, indem man die (über Translationen gemittelte) Zahl von Punkten im Spat mit den Kantenvektoren u, v, w abzählt. Dabei kommt die Händigkeit der Punkte zum Tragen: stimmt diese mit der Händigkeit des geordneten Systems u, v, w überein, so wird positiv gezählt, andernfalls negativ.

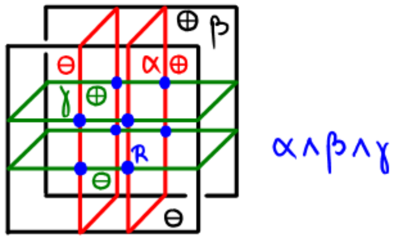


Der Betrag $|\rho(u,v,w)|$ wird ermittelt durch Abzählen der Gitterpunkte von ρ im Spat mit den Kantenvektoren u, v, w. Im gezeichneten Beispiel ist $\rho(u,v,w)$ positiv, denn die Händigkeit (R) der Gitterpunkte von ρ stimmt mit der Händigkeit des Systems u, v, w überein.

Beispiel. Aus drei Linearformen α, β, γ auf V konstruiert man eine alternierende 3-lineare Form $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \mathrm{Alt}^3(V)$ durch Bildung des doppelten äußeren Produkts:

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(v_1, v_2, v_3) := \; & \alpha(v_1)\beta(v_2)\gamma(v_3) - \alpha(v_2)\beta(v_1)\gamma(v_3) \\ & + \alpha(v_2)\beta(v_3)\gamma(v_1) - \alpha(v_3)\beta(v_2)\gamma(v_1) \\ & + \alpha(v_3)\beta(v_1)\gamma(v_2) - \alpha(v_1)\beta(v_3)\gamma(v_2) \,.\end{aligned}$$

Im Fall von $V \simeq \mathbb{R}^3$ sind die Gitterpunkte von $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ anschaulich gesprochen die Schnittpunkte der Ebenenscharen von α, β, γ. Bilden α, β, γ ein Orthonormalsystem, so kann man sich $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ als das kubische Einheitsgitter vorstellen. Die Händigkeit des Systems α, β, γ bestimmt die Händigkeit der Punkte von $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.



Beispiel. Im Euklidischen Vekorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ entsteht durch Kombinieren des Vektorprodukts mit dem Euklidischen Skalarprodukt das Spatprodukt:

$$\Omega : \; V \times V \times V \to \mathbb{R}\,, \quad (u, v, w) \mapsto \langle u \times v, w \rangle \equiv \Omega(u, v, w)\,. \tag{1.65}$$

Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts und des Skalarprodukts folgt, dass das Spatprodukt eine alternierende 3-lineare Form ist. Insbesondere hat das Spatprodukt die Eigenschaft der totalen Schiefsymmetrie: $\Omega(v, u, w) = -\Omega(u, v, w) = \Omega(u, w, v)$ usw. Bezüglich jeder rechtshändigen Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z gilt

$$\Omega(u, v, w) = (u_x v_y - v_x u_y) w_z + (u_y v_z - v_y u_z) w_x + (u_z v_x - v_z u_x)\, w_y\,. \tag{1.66}$$

Interpretation. $|\Omega(u, v, w)|$ ist das Volumen des von u, v, w aufgespannten Spats (= Parallelepipeds). Das Spatprodukt $\Omega(u, v, w)$ ist positiv oder negativ, je nachdem ob u, v, w ein rechtshändiges bzw. linkshändiges System bilden.

1.16 Axiale Vektoren

Das Spatprodukt Ω im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ eröffnet die Möglichkeit, Vektoren (genauer gesagt: "axiale" Vektoren) in alternierende 2-lineare Formen umzuwandeln und umgekehrt. Dies geschieht durch den Isomorphismus

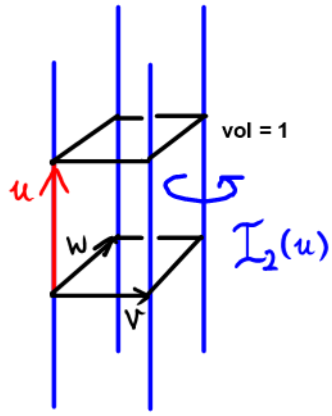
$$\mathcal{I}_2 : \; V \to \mathrm{Alt}^2(V), \quad u \mapsto \Omega(u, \cdot, \cdot). \tag{1.67}$$

Tatsächlich besitzt $\omega = \mathcal{I}_2(u) = \Omega(u, \cdot, \cdot) : \; V \times V \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften der Schiefsymmetrie und Bilinearität, ist also ein Element von $\mathrm{Alt}^2(V)$. Dieser Definition entnimmt man die folgende Charakterisierung von $\mathcal{I}_2(u)$:

1. Die Geradenschar der alternierenden 2-linearen Form $\mathcal{I}_2(u)$ liegt parallel zum Vektor u.

2. Die Richtung von u genügt zusammen mit dem Zirkulationssinn von $\mathcal{I}_2(u)$ der Rechte-Hand-Regel.

3. Die Geraden der Schar von $\mathcal{I}_2(u)$ sind so angeordnet, dass zwei verbindende Vektoren v, w (siehe Graphik) zusammen mit u das Spatvolumen $\Omega(u, v, w) = 1$ ergeben.



Bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z mit Dualbasis ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z gelten die Relationen

$$\mathcal{I}_2(e_z) = \vartheta_x \wedge \vartheta_y\,, \quad \mathcal{I}_2(e_x) = \vartheta_y \wedge \vartheta_z\,, \quad \mathcal{I}_2(e_y) = \vartheta_z \wedge \vartheta_x\,. \tag{1.68}$$

Diese Behauptung verifiziert man wie folgt:

$$(\mathcal{I}_2(e_z))(v, w) = \Omega(e_z, v, w) = v_x w_y - w_x v_y = (\vartheta_x \wedge \vartheta_y)(v, w), \quad \text{usw.}$$

Wir sprechen jetzt noch einen konzeptionell wichtigen Punkt an.

Definition. Ein axialer Vektor, ℓ, im $\mathbb{R}^3$ (oder allgemeiner in $V \simeq \mathbb{R}^3$) ist eine aus einem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einer Händigkeit $\mathrm{Or} \in \{R, L\}$ gebildete Äquivalenzklasse $\ell = [v; \mathrm{Or}] \equiv [-v; -\mathrm{Or}]$.

Bemerkung. Ein axialer Vektor besteht also aus zwei Dingen: einem Vektor, sagen wir v, und einer Händigkeit, zum Beispiel R (rechte Hand). Dabei betrachten wir das Paar v, R als äquivalent zum Paar $-v, L$, wir fassen diese zwei Paare also in eine Äquivalenzklasse $[v; R] = [-v; L] = \ell$ zusammen. Der Sinn der Bildung von Äquivalenzklassen wird in der folgenden Graphik deutlich.

Beispiel. Wir greifen das obige Beispiel wieder auf und können jetzt die Natur des Drehimpulses als axialer Vektor genauer beschreiben:

$$\ell = [\vec{r} \times \vec{p}; R] = [-\vec{r} \times \vec{p}; L]. \tag{1.69}$$

1.17 Beziehung zwischen Vektorprodukt und äußerem Produkt

Sei nun $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I} : \ V \to V^* \equiv \mathrm{Alt}^1(V)$ der aus Abschnitt 1.13 bekannte Isomorphismus zwischen Vektoren und Linearformen. Wir behaupten, dass die zwei Isomorphismen $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ für $V \simeq \mathbb{R}^3$ auf die folgende Weise miteinander zusammenhängen:

$$\mathcal{I}_2(u \times v) = \mathcal{I}_1(u) \wedge \mathcal{I}_1(v) \qquad (u, v \in V), \tag{1.70}$$

d.h. das Vektorprodukt $V \times V \to V$ entspricht dem äußeren Produkt $\wedge : \ V^* \times V^* \to \mathrm{Alt}^2(V)$.

Beweis (mittels rechtshändiger Orthonormalbasis):

$$\mathcal{I}_2(e_x \times e_y) = \mathcal{I}_2(e_z) = \vartheta_x \wedge \vartheta_y = \mathcal{I}_1(e_x) \wedge \mathcal{I}_1(e_y), \quad \text{usw.}$$

Bemerkung. Das äußere Produkt ist eine natürliche Operation, die für strukturlose Vektorräume jeder Dimension existiert. Das Vektorprodukt hingegen, das sei hier nochmals betont, ist unnatürlich in dem Sinn, dass es nur für $V \simeq \mathbb{R}^3$ existiert (und auch der Zusatzstruktur des Euklidischen Skalarprodukts in Kombination mit der Rechte-Hand-Regel bedarf). Die obige Beziehung (1.70) erklärt zudem, warum wir in Abschnitt 1.14 (**Kritik**) behaupteten, dass das Vektorprodukt überflüssig sei (es wird nämlich durch das äußere Produkt bestens ersetzt).

Anwendung. Für zwei Vektoren $u, v \in V \simeq \mathbb{R}^3$ lässt sich das Vektorprodukt $u \times v$ mit der Formel (1.70) anschaulich ermitteln, indem man die Ebenenschar der Linearform $\mathcal{I}_1(u) \in V^*$ mit der Ebenenschar von $\mathcal{I}_1(v) \in V^*$ schneidet (und dann $\mathcal{I}_2^{-1}$ anwendet). Diese Beschreibung illustriert die kuriose Eigenschaft des Vektorprodukts, dass seine Länge eigentlich eine Fläche ist.

1.18 Affiner Raum

Der Begriff des Vektorraums an sich ergibt noch kein befriedigendes Modell für den (physikalischen) Raum. Deshalb nehmen wir folgende Erweiterung vor.

Definition. Unter einem affinen Raum $(M, V, +)$ versteht man eine Menge M von Punkten zusammen mit einem Vektorraum V und einer Addition

$$M \times V \to M, \qquad (p, v) \mapsto p + v,$$

mit den Eigenschaften:

(i) Es gilt eine Variante des Assoziativgesetzes:

$$p + (u + v) = (p + u) + v$$

für alle $p \in M$ und $u, v \in V$.

(ii) Zu jedem Paar $(p, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$.

Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den Differenzvektor zu (p, q). Für einen affinen Raum M mit normiertem Differenzvektorraum $(V, \| \ \|)$ nennt man

$$d(p, q) := \| p - q \| \tag{1.71}$$

den Abstand zwischen den Punkten $p, q \in M$.

Bemerkung. Im Fall von $p = q$ ist $p - q$ immer der Nullvektor, denn $p = p + v$ zieht $p = p + v = (p + v) + v \overset{\text{(i)}}{=} p + 2v$ nach sich und wegen der Eindeutigkeit von v folgt $2v = v = \mathbf{0}$.

Beispiel. Die Menge aller Punkte auf einer Geraden zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen längs der Geraden bildet eine 1-dimensionalen affinen Raum.

Definition. Ein affines Koordinatensystem $\{p_0\,; e_1, \ldots, e_n\}$ besteht aus einem ausgezeichneten Punkt p_0 (dem "Koordinatenursprung") zusammen mit einer Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von V. Die affinen Koordinaten $x_i : \ M \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ definiert man durch

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - p_0), \tag{1.72}$$

wobei $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist. Den Ausdruck

$$p = p_0 + x_1(p)e_1 + \ldots + x_n(p)e_n \tag{1.73}$$

nennen wir die Koordinatendarstellung des Punktes p. Man beachte, dass gilt

$$x_i(p + av) = x_i(p) + a\,\vartheta_i(v) \qquad (p \in M,\ a \in \mathbb{R},\ v \in V). \tag{1.74}$$

Definition. Eine Abbildung $f: M \to N$ zwischen affinen Räumen heißt affin, wenn sie affine Unterräume auf affine Unterräume abbildet (also Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden, Ebenen auf Ebenen, usw., wobei Entartung zugelassen ist).

Mitteilung. Jede affine Abbildung $f: M \to N$ hat die Form

$$f(p) = f(o) + L(p - o). \tag{1.75}$$

Hierbei ist o irgendein ausgewählter Punkt (z.B. der Koordinatenursprung) und L eine lineare Abbildung zwischen den Differenzvektorräumen zu M und N. Diese Abbildung L hängt von der Wahl des Bezugspunkts o nicht ab und wird der lineare Teil von f genannt. Insbesondere hat die Gerade $q + tv$ $(t \in \mathbb{R})$ in M mit Aufpunkt q und Differenzvektorraum $\mathbb{R} \cdot v$ das Bild

$$f(q + tv) = f(o) + L(q + tv - o) = f(o) + L(q - o) + tLv,$$

was eine Gerade in N ist, mit Aufpunkt $f(o) + L(q - o) = f(q)$ und Differenzvektorraum $\mathbb{R} \cdot Lv$.

Schwerpunkt. In einem affinen Raum M versteht man unter dem (Massen-)Schwerpunkt eines Systems von Punkten $p_1, \ldots, p_n$ mit Massen $m_1, \ldots, m_n$ die Lösung $S \in M$ des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - S) = \mathbf{0}. \tag{1.76}$$

Nach Wahl eines Koordinatenursprungs o lässt sich diese Gleichung nach S auflösen:

$$S = o + \mathcal{M}^{-1} \sum_{i=1}^{n} m_i(p_i - o), \quad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,, \tag{1.77}$$

d.h. der Ortsvektor $S - o$ des Massenschwerpunkts ist das mit den Massenanteilen $m_i/\mathcal{M}$ gewichtete arithmetische Mittel der Ortsvektoren $p_i - o$.

Aufgabe. Das Bild des Massenschwerpunkts unter einer affinen Abbildung f ist wieder der Massenschwerpunkt.