1.19 Euklidischer Raum

In Abschnitt 1.18 wurde der Begriff des affinen Raums eingeführt. Kennzeichnend für affine Räume ist die Existenz von Geraden, Ebenen, usw., sowie der Begriff von Parallelität und Paralleltranslation. Ein affiner Raum, dessen Differenzvektorraum die zusätzliche Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts trägt (also ein Euklidischer Vektorraum ist), heißt Euklidisch. Der dreidimensionale Euklidische Raum taugt unter Vernachlässigung relativistischer und gravitativer Effekte als Modell für den realen physikalischen Raum.

Definition. Unter einem n-dimensionalen Euklidischen Raum E_n versteht man einen affinen Raum $(X, V, +)$ mit Differenzvektorraum $V \simeq \mathbb{R}^n$, auf dem ein Euklidisches Skalarprodukt $\langle \, , \, \rangle$ erklärt ist. Ein kartesisches Koordinatensystem für $(X, V, +, \langle \, , \, \rangle)$ ist ein affines Koordinatensystem $\{o; e_1, \ldots, e_n\}$, dessen Basisvektoren ein Orthonormalsystem bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Definition. Sei M ein Euklidischer Raum. Eine Euklidische Transformation (oder Euklidische Bewegung) von M ist eine affine Abbildung $f : M \to M$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass das Euklidische Skalarprodukt ungeändert bleibt; d.h. es gilt

$$\langle f(p) - f(q), f(p') - f(q') \rangle = \langle p - q, p' - q' \rangle \tag{1.78}$$

für alle $p, q, p', q' \in M$.

Euklidische Gruppe. Jede Euklidische Bewegung lässt sich umkehren. Die Euklidischen Bewegungen von M bilden somit eine Gruppe, nämlich die Euklidische Gruppe von M.

Als affine Abbildung ist jede Euklidische Bewegung f von der Form (1.75), also $f(p) - f(o) = R(p - o)$ mit einer linearen Abbildung R, die wegen (1.78) das Skalarprodukt erhält:

$$\langle Ru, Ru' \rangle = \langle u, u' \rangle. \tag{1.79}$$

Lineare Abbildungen R mit dieser Eigenschaft heißen Drehungen.

Die Euklidische Gruppe wird durch Drehungen und Translationen erzeugt. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\{o; e_1, \ldots, e_n\}$ hat jede Euklidische Bewegung f den Ausdruck

$$x_i(f(p)) = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \, x_j(p) + v_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.80}$$

Hierbei sind v_i die Komponenten des Translationsvektors $v = f(o) - o$ der Euklidischen Bewegung f, und (R_{ij}) ist die Matrix ihrer Drehung R; die Matrixelemente genügen den Relationen

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \, . \tag{1.81}$$

Mitteilung. Später wird noch vom Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Drehungen (oder Spiegelungen) zu reden sein.

2 Vektoranalysis

2.1 Differenzial einer Abbildung

Der Begriff der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f: X \to Y$ im eindimensionalen Fall $X, Y \subset \mathbb{R}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere kennen wir schon die Ableitung (für differenzierbares f):

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \,.$$

Wir führen jetzt die höherdimensionale Verallgemeinerung des Begriffs von Ableitung ein.

Sei dazu X, Y ein Paar affiner Räume mit normierten Differenzvektorräumen $(V, \| \; \|_V)$ bzw. $(W, \| \; \|_W)$, und sei eine Abbildung $f: X \to Y$ gegeben. Wir fixieren einen Punkt $p \in X$.

Definition. Die Abbildung $f: X \to Y$ heißt in $p \in X$ stetig, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Vektoren $v \in V$ mit Norm $\| v \|_V < \delta$ gilt:

$$\| f(p+v) - f(p) \|_W < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Weiter heißt die Abbildung f in p differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $L: V \to W$ mit der folgenden (Approximations-)Eigenschaft existiert: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\| f(p+v) - f(p) - Lv \|_W < \varepsilon \, \| v \|_V \tag{2.2}$$

für alle $v \in V$ mit $\| v \|_V < \delta$ gilt. Diese lineare Abbildung L (so sie existiert) heißt das Differenzial der Abbildung f im Punkt p. Sie wird mit $L \equiv D_p f$ bezeichnet.

Bemerkung. Eine verkürzte Formulierung der Bedingungen ist:

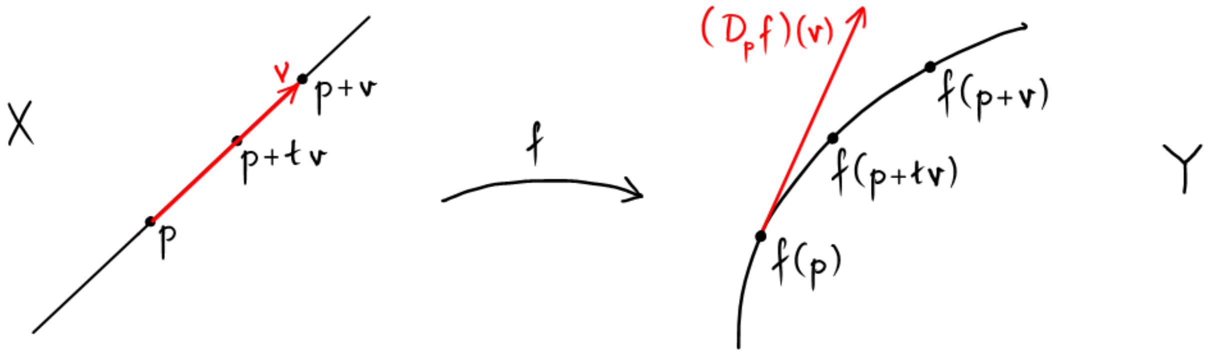
$$\text{Stetigkeit}: \quad \lim_{\| v \|_V \to 0} \| f(p+v) - f(p) \|_W = 0.$$

$$\text{Differenzierbarkeit}: \quad \lim_{\| v \|_V \to 0} \frac{\| f(p+v) - f(p) - (D_p f)(v) \|_W}{\| v \|_V} = 0.$$

Hierbei ist aber nicht selbstverständlich, was mit den beiden Limites gemeint sein soll; ihr genauer Sinn wird durch die obige Formulierung mit ε und δ erläutert.

Aufgabe. Differenzierbarkeit in p impliziert Stetigkeit in p.

Berechnung (des Differenzials). Ist die Differenzierbarkeit in p erst einmal gesichert, können wir das Differenzial $D_p f$ folgendermaßen ermitteln. Wir betrachten das Geradenstück $[-\delta, \delta] \ni t \mapsto p + tv$ in X und sein Bild unter f, also die Kurve $t \mapsto f(p+tv)$, in Y.



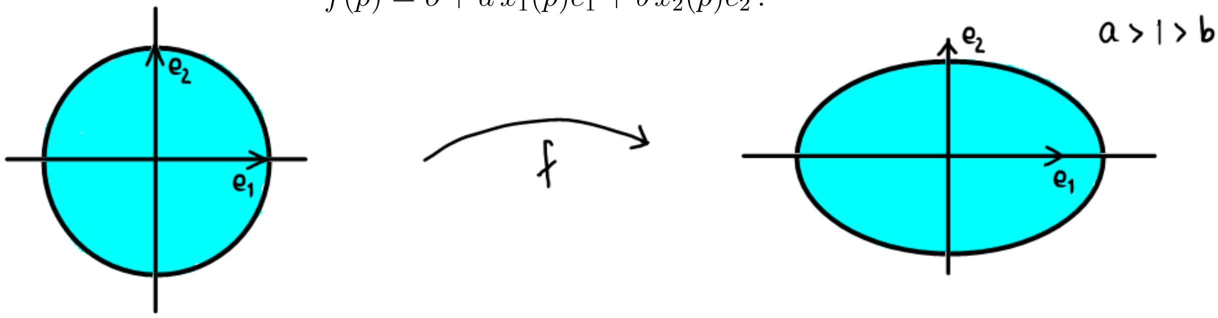
Fassen wir v als die Geschwindigkeit der Bewegung $t \mapsto p + tv$ (mit der Zeitvariablen t auf), so ist $(D_p f)(v)$ die (momentane) Geschwindigkeit der Bildbewegung $t \mapsto f(p+tv)$ zur Zeit $t = 0$, also im Punkt $f(p) \in Y$. In Formeln:

$$Lv = (D_p\, f)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \equiv \frac{d}{dt} f(p + tv)\Big|_{t=0} \,. \tag{2.3}$$

Richtungsableitung. Beim Bilden des Differenzials an sich lässt man offen, “in welcher Richtung differenziert wird”; man betrachtet sozusagen alle möglichen Richtungen gleichzeitig. Bei Anwendung des Differenzials $L = D_p f$ auf einen konkreten Vektor $v \in V$ entsteht die Richtungsableitung Lv (von f im Punkt p) in Richtung von v.

Beispiel. Sei $X = Y$ eine Ebene mit affinem Koordinatensysem $\{o\,; e_1, e_2\}$ und affinen Koordinaten x_1, x_2. Wir betrachten die Abbildung

$$f(p) = o + a\, x_1(p) e_1 + b\, x_2(p) e_2 \,.$$



In diesem Beispiel gilt $(D_p\, f)(e_1) = a\, e_1$ und $(D_p\, f)(e_2) = b\, e_2$.

2.2 Kettenregel

Für ein Tripel von affinen Räumen X, Y, Z mit normierten Differenzvektorräumen U, V bzw. W betrachten wir die Verkettung $\psi \circ \phi$ zweier Abbildungen:

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z. \tag{2.4}$$

Wir machen die folgenden Annahmen:

1. ϕ sei differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differenzial $D_p\, \phi = L$.
2. ψ sei differenzierbar in $\phi(p) \in Y$ mit Differenzial $D_{\phi(p)} \psi = K$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die folgende Aussage.

Kettenregel. Die Verkettung $\psi \circ \phi : \; X \to Z$ ist differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differenzial

$$D_p(\psi \circ \phi) = (D_{\phi(p)} \psi)(D_p\, \phi) = KL. \tag{2.5}$$

Bemerkung. Vereinfacht ausgedrückt besagt die Kettenregel, dass das Differenzial der Verkettung gleich der Verkettung der Differenziale ist. (Im letzteren Fall bedeutet “Verkettung” ganz einfach die Hintereinanderausführung KL der linearen Abbildungen $L = D_p\, \phi : \; U \to V$ und $K = D_{\phi(p)} \psi : \; V \to W$.)

Beweis (der Kettenregel). Nach Voraussetzung existiert

1. für jedes $\varepsilon_1 > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$\| \, \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \, \| < \varepsilon_1 \, \| \, u \, \|$$

   für alle $u \in U$ mit $\| \, u \, \| < \delta_1$,

2. und für jedes $\varepsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\| \, \psi\big(\phi(p) + v\big) - \psi\big(\phi(p)\big) - Kv \, \| < \varepsilon_2 \, \| \, v \, \|$$

   für alle $v \in V$ mit $\| \, v \, \| < \delta_2$.

Durch geeignetes Addieren und Subtrahieren,

$$\begin{aligned}&\| \, \psi\big(\phi(p+u)\big) - \psi\big(\phi(p)\big) - KLu \, \| = \\ &\| \, \psi\big(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)\big) - \psi\big(\phi(p)\big) - K\big(\phi(p+u) - \phi(p)\big) + K\big(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu\big) \, \| \,,\end{aligned}$$

folgt mittels Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}&\| \, \psi\big(\phi(p+u)\big) - \psi\big(\phi(p)\big) - KLu \, \| \le \\ &\| \, \psi\big(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)\big) - \psi(\phi(p)) - K\big(\phi(p+u) - \phi(p)\big) \, \| + \| \, K\big(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu\big) \, \| \,.\end{aligned}$$

Der nächste Schritt erfordert einen Begriff, der hier noch neu ist. Für eine lineare Abbildung $L: \, U \to V$ zwischen normierten Vektorräumen definiert man die Operatornorm $\| \, L \, \|_{\mathrm{op}}$ durch

$$\| \, L \, \|_{\mathrm{op}} = \sup_{u \in U \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\| \, Lu \, \|}{\| \, u \, \|}. \tag{2.6}$$

Mit dieser Definition hat man $\| \, Lu \, \| \le \| \, L \, \|_{\mathrm{op}} \| \, u \, \|$ für alle $u \in U$.

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle jetzt

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \, \| \, K \, \|_{\mathrm{op}}} \,, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2 \, (\varepsilon_1 + \| \, L \, \|_{\mathrm{op}})} \,.$$

Dann folgt für alle u mit $\| \, u \, \| < \min\big(\delta_1, (\varepsilon_1 + \| \, L \, \|_{\mathrm{op}})^{-1} \delta_2\big)$

$$\begin{aligned}\| \, \phi(p+u) - \phi(p) \, \| &\le \| \, \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \, \| + \| \, Lu \, \| \\ &< \varepsilon_1 \, \| \, u \, \| + \| \, L \, \|_{\mathrm{op}} \, \| \, u \, \| = (\varepsilon_1 + \| \, L \, \|_{\mathrm{op}}) \, \| \, u \, \| < \delta_2 \,,\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}&\| \, \psi\big(\phi(p+u)\big) - \psi\big(\phi(p)\big) - KLu \, \| \\ &< \varepsilon_2 \, \| \, \phi(p+u) - \phi(p) \, \| + \| \, K \, \|_{\mathrm{op}} \, \| \, \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \, \| \\ &< \varepsilon_2 \, (\varepsilon_1 + \| \, L \, \|_{\mathrm{op}}) \, \| \, u \, \| + \| \, K \, \|_{\mathrm{op}} \, \varepsilon_1 \, \| \, u \, \| = \frac{\varepsilon}{2} \, \| \, u \, \| + \frac{\varepsilon}{2} \, \| \, u \, \| = \varepsilon \, \| \, u \, \| \,.\end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung $\psi \circ \phi$ differenzierbar im Punkt p, und das Differenzial ist die Verkettung $D_p(\psi \circ \phi) = D_{\phi(p)} \, \psi \circ D_p \, \phi$ der Differenziale. $\square$

Spezialfall 1: Sei $X = Z$ und $\psi = \phi^{-1}$ (inverse Abbildung), also

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\phi^{-1}} X. \tag{2.7}$$

Wegen $D_p(\phi^{-1} \circ \phi) = \mathrm{Id}$ (identische Abbildung) folgt dann aus der Kettenregel die Formel

$$u = D_p(\phi^{-1} \circ \phi)(u) = (D_{\phi(p)}\, \phi^{-1})(D_p\, \phi)(u), \tag{2.8}$$

oder kurz:

$$D_{\phi(p)}\, \phi^{-1} = (D_p\, \phi)^{-1}, \tag{2.9}$$

d.h. das Differenzial der inversen Abbildung ist gleich dem Inversen des Differenzials.

Spezialfall 2: Für $X = Y = Z = \mathbb{R}$ sei g die Umkehrfunktion zu f, also $g(f(x)) = x$. Dann besagt die Kettenregel, dass gilt:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2.10}$$

Zum Beispiel folgt für die Ableitung der Logarithmusfunktion aus $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ die Formel $\ln'(\mathrm{e}^x) = 1/\mathrm{e}^x$, also $\ln'(y) = 1/y$.

2.3 Vektorfelder und 1-Formen

Motivation. Beim Herumbewegen elektrisch geladener Körper im elektrischen Kraftfeld muss Arbeit geleistet werden, oder es wird Energie frei; Gleiches gilt für Körper mit Masse im Gravitationsfeld, usw. Unser Ziel ist es, die Gesamtarbeit als Wegintegral des Kraftfeldes entlang des zurückgelegten Weges auszudrücken. Zu diesem Zweck treffen wir hier einige Vorbereitungen. □

Sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Ein Vektorfeld u auf X ist eine Abbildung

$$u : \; X \to V, \quad p \mapsto u(p), \tag{2.11}$$

die jedem Punkt $p \in X$ einen Vektor $u(p) \in V$ zuweist. Von den zahlreichen physikalischen Beispielen für Vektorfelder sei hier nur das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung erwähnt; sie weist jedem Ort der Strömung die lokale Strömungsgeschwindigkeit zu.

Warnung. Vektorfelder taugen nicht (jedenfalls nicht ohne Zusatzannahmen über die geometrische Struktur des Raumes) als Integranden für Wegintegrale. Die tauglichen Integranden sind andere.

Definition. Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Eine 1-Form α auf X ist eine räumlich veränderliche Linearform, also eine Abbildung

$$\alpha : \; X \to V^*, \quad p \mapsto \alpha_p \tag{2.12}$$

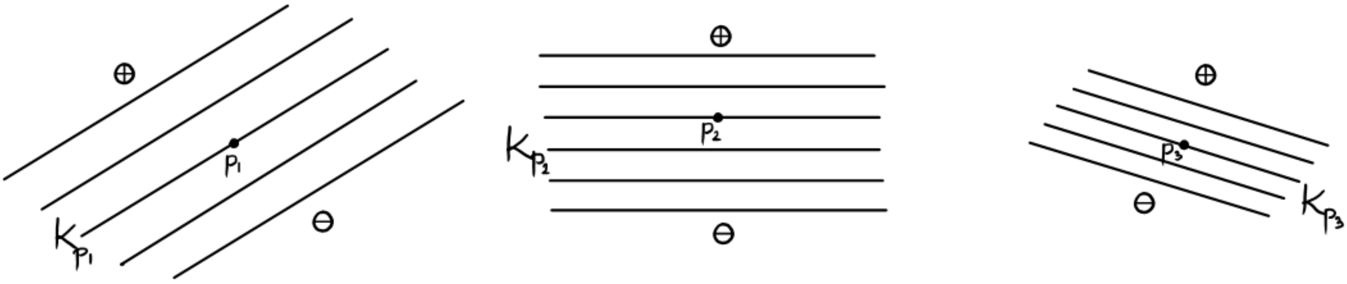
(von der wir je nach Bedarf geeignete Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften verlangen).

Beispiel 1. Jedes Kraftfeld ist (fundamental betrachtet) eine 1-Form. Zwar ist es in der Praxis üblich, Kraftfelder als Vektorfelder aufzufassen, diese Deutung ist aber nur möglich, wenn die Geometrie des Raumes als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bei einer primitiven Kraftmessung im dreidimensionalen Raum $X = E_3$ wird ermittelt, welche differenzielle Energieänderung $K_p(v)$ ein Testkörper bei Translation in Richtung von $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$ erfährt. Als unmittelbares Resultat der Messung (am Ort p) ergibt sich die Linearform

$$K_p: \text{ Translationsvektor } v \;\mapsto\; \text{differenzielle Energieänderung } K_p(v)\,.$$

Das Kraftfeld K ist dann insgesamt eine Zuordnung $K: \; X \to V^* \simeq (\mathbb{R}^3)^*$, $p \mapsto K_p$, also eine 1-Form. □

Linearformen im dreidimensionalen Raum werden bekanntlich durch polarisierte homogene Ebenenscharen visualisiert. (Dabei wird, wie in Abschnitt 1.4 erläutert, der Wert $K_p(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen ermittelt.) Wir können die Kraftfeld-1-Form also zeichnerisch skizzieren, indem wir für eine Auswahl von Punkten die zugehörige Ebenenschar auftragen:



Die Ebenen haben jeweils die Bedeutung der (lokalen) Nullflächen des Kraftfeldes K.

Beispiel 2. Aus Abschnitt 2.1 kennen wir bereits den Begriff des Differenzials einer Abbildung $f: \; X \to Y$ zwischen zwei affinen Räumen $(X, V, +)$ und $(Y, W, +)$. Im Spezialfall einer differenzierbaren Funktion $f: \; X \to \mathbb{R}$ (also für $Y \equiv \mathbb{R}$, $W \equiv \mathbb{R}$) bezeichnen wir das Differenzial mit $D_p f =: (d\,f)_p$. Wir erinnern kurz an die Definition:

$$(d\,f)_p(v) = \frac{d}{dt} f(p + tv)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}\,.$$

Insgesamt weist das Differenzial $d\,f$ jedem Punkt $p \in X$ eine Linearform $(d\,f)_p \in V^*$ zu. Somit ist das Differenzial $d\,f$ einer reellwertigen Funktion f eine 1-Form. □

Aus einem Vektorfeld $u: \; X \to V$ und einer 1-Form $\alpha: \; X \to V^*$ lässt sich in invarianter Weise eine Funktion $f \equiv \alpha(u): \; X \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist erklärt durch

$$f(p) := \alpha_p(u(p))\,.$$

Um die Funktion $f = \alpha(u)$ im Punkt p zu berechnen, setzt man also den Vektor $u(p)$ in die Linearform α_p ein. Diese Operation der Bildung einer Funktion aus einem Vektorfeld und einer 1-Form heißt Kontraktion oder inneres Produkt.

Koordinatendarstellung. In einem affinen Raum $(X, V, +)$ sei ein affines Koordinatensystem $\{o\,; e_1\,, \ldots, e_n\}$ fest gewählt. Wir bezeichnen dann mit dem Symbol ∂_i das konstante Vektorfeld

$$\partial_i \;:\quad X \to V, \quad p \mapsto e_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.13}$$

zum Basisvektor e_i. Die entsprechende Rolle im Kalkül mit 1-Formen spielen die Differenziale der affinen Koordinaten. Wir erinnern daran, dass durch die Wahl eines affinen Koordinatensystems $\{o\,; e_1, \ldots, e_n\}$ affine Koordinatenfunktionen

$$x_i(p) = \vartheta_i(p-o) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

festgelegt werden. Ihre Differenziale dx_i sind konstant:

$$(dx_i)_p(v) = \frac{d}{dt}\vartheta_i(p+tv-o)\Big|_{t=0} = \vartheta_i(v), \tag{2.14}$$

d.h. unabhängig vom Punkt p. Das innere Produkt von dx_i mit ∂_j ist die konstante Funktion

$$dx_i(\partial_j) = \delta_{ij} \tag{2.15}$$

mit Funktionswert $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

Für die Koordinatendarstellung von Vektorfeldern und 1-Formen benötigt man die Operation der Multiplikation mit Funktionen. Hierzu erinnern wir zunächst an die Operation der Skalarmultiplikation für Vektoren und Linearformen:

$$\mathbb{R} \times V \to V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v \equiv av,$$
$$\mathbb{R} \times V^* \to V^*, \quad (a, \lambda) \mapsto a \cdot \lambda \equiv a\lambda\,.$$

Punktweise Übertragung gibt dann eine Multiplikation

$$\text{Funktionen} \times \text{Vektorfelder} \to \text{Vektorfelder}\,, \quad (f, u) \mapsto f\,u\,,$$
$$\text{Funktionen} \times \text{1-Formen} \to \text{1-Formen}\,, \quad (f, \alpha) \mapsto f\,\alpha\,,$$

durch

$$(fu)(p) = f(p)\,u(p) \quad \text{bzw.} \quad (f\alpha)_p = f(p)\,\alpha_p\,. \tag{2.16}$$

Im letzteren Fall lautet die ausführliche Schreibweise

$$(f\alpha)_p(v) = f(p)\,\alpha_p(v). \tag{2.17}$$

Hiermit haben wir die Möglichkeit, beliebige Vektorfelder und 1-Formen als Linearkombinationen der Basisvektorfelder ∂_i bzw. der Koordinatenformen dx_i mit Funktionen als Koeffizienten zu auszudrücken:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i\,\partial_i\,, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,dx_i\,. \tag{2.18}$$

Wegen $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$ gelten die Formeln

$$\alpha(\partial_i) = \alpha_i\,, \quad dx_i(u) = u_i\,, \quad \alpha(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\,. \tag{2.19}$$