$\gamma_1 : [0,1] \to X$ eine andere Parametrisierung von Γ, so existiert eine monoton wachsende differenzierbare Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$ mit $\gamma_1(t) = \gamma(h(t))$, und es resultiert

$$\int_0^1 \alpha_{\gamma_1(t)}\big(\gamma_1'(t)\big)\, dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(h(t))}\big(\gamma'(h(t))\big)\, h'(t)\, dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(s)}\big(\gamma'(s)\big)\, ds. \tag{2.48}$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt hier aus der Kettenregel, das zweite aus der Variablensubstitution $s = h(t)$.

Aufgabe. Man hat beim Wegintegral die Freiheit, das Intervall $[0,1]$ durch ein anderes Intervall $[a,b]$ zu ersetzen: ist $\gamma : [a,b] \to X$ eine Parametrisierung von Γ, so gilt

$$\int_\Gamma \alpha = \int_a^b \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt\,. \tag{2.49}$$

Mitteilung. Bei genauer Betrachtung erweist sich die Einschränkung $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ als unnötig. Mehrmaliges Umkehren ist erlaubt (!), solange γ nur der Spur der Kurve Γ treu bleibt und vom Anfangspunkt zum Endpunkt führt.

2.5.1 Wegintegral in kartesischen Koordinaten

Die konkrete Berechnung des Wegintegrals erfordert in der Regel die Wahl eines Koordinatensystems. Hierbei hat man völlige Freiheit, denn das Wegintegral drückt sich in allen Koordinaten in der gleichen Weise aus. Von dieser Freiheit wollen wir hier aber noch keinen Gebrauch machen, sondern ein ganz spezielles Koordinatensystem verwenden. Außerdem arbeiten wir in diesem Abschnitt im dreidimensionalen Euklidischen Raum, E_3.

Wir erinnern daran, dass ein affines Koordinatensystem $\{o\,; e_x, e_y, e_z\}$ von E_3 kartesisch heißt, wenn die Basisvektoren e_x, e_y, e_z ein Orthonormalsystem von $V = \mathbb{R}^3$ bilden. Durch ein solches Koordinatensystem werden kartesische Koordinaten x, y, z und Koordinatenformen $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ bestimmt. $\mathrm{d}x$ läßt sich anschaulich als die Schar von Ebenen auffassen, die parallel zur yz-Ebene liegen (eigentlich: die Lösungsmengen der affinen Gleichung $x = \text{constant}$ sind) und Abstand Eins voneinander haben (mit Pluspol bei $x = +\infty$). Eine analoge Aussage gilt für $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$. Eine beliebige 1-Form A wird durch $A = A_x\,\mathrm{d}x + A_y\,\mathrm{d}y + A_z\,\mathrm{d}z$ ausgedrückt, wobei die Komponenten Funktionen $A_x, A_y, A_z : E_3 \to \mathbb{R}$ sind.

Rechenbeispiel. Eine Schraubenlinie Γ mit Radius R, Schraubenhöhe L und Hub $2\pi L/a$ wird parametrisiert durch

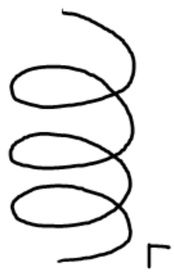
$$[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) = o + R\cos(at)e_x + R\sin(at)e_y + Lte_z\,.$$

Zu berechnen sei das Wegintegral längs Γ eines Kraftfelds K mit Koordinatendarstellung

$$K = k_1\mathrm{d}y + k_2 z\,\mathrm{d}z \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Zuerst ermitteln wir durch Ableiten nach t den Tangentialvektor der Kurve:

$$\gamma'(t) = -Ra\sin(at)e_x + Ra\cos(at)e_y + Le_z\,.$$



Einsetzen ins Kraftfeld ergibt

$$K_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = k_1 Ra\cos(at) + k_2 L^2 t\,.$$

So erhalten wir das Wegintegral

$$\int_\Gamma K = \int_0^1 K_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt = \int_0^1 (k_1 Ra\cos(at) + k_2 L^2 t)\,dt = k_1 R\sin(a) + k_2 L^2/2\,.$$

2.5.2 Wegintegral einer exakten 1-Form

Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum.

Definition. Eine 1-Form $\alpha: \; X \to V^*$ heißt exakt, wenn sie das Differenzial einer Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ ist, wenn also gilt

$$\alpha_p(v) = (\mathrm{d}f)_p(v) \equiv (D_p f)(v), \tag{2.50}$$

oder kurz: $\alpha = \mathrm{d}f$. Ein exaktes Kraftfeld K heißt konservativ. In der Physik schreibt man in diesem Fall $K = -\mathrm{d}U$ und nennt die Funktion U ein Potenzial des konservativen Kraftfeldes K.

Hauptsatz (der Differenzial- und Integralrechnung). Das Wegintegral $\int_\Gamma \alpha$ einer exakten 1-Form $\alpha = \mathrm{d}f$ hängt nur vom Anfangspunkt p und vom Endpunkt q der Kurve Γ ab, nicht aber vom Verlauf der Kurve dazwischen:

$$\int_\Gamma \alpha = \int_\Gamma \mathrm{d}f = f(q) - f(p)\,. \tag{2.51}$$

Beweis. Wähle eine Parametrisierung der Kurve Γ,

$$\gamma: \; [0,1] \to X, \quad t \mapsto \gamma(t), \quad \gamma(0) = p\,, \quad \gamma(1) = q\,.$$

Per Definition ist dann

$$\int_\Gamma \alpha = \int_0^1 (\mathrm{d}f)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\,dt.$$

Für die Verkettung von Abbildungen

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

gilt nun nach der Kettenregel

$$(\mathrm{d}f)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = (D_{\gamma(t)}\, f)\,(D_t\gamma) = D_t(f\circ\gamma) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)).$$

Hiermit folgt schon das gewünschte Ergebnis:

$$\int_\Gamma \alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(q) - f(p).$$

Beispiel 1. Sei jetzt $X = E_3$ wieder der Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Die elektrische Feldstärke E einer im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung Q ist die 1-Form

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,. \tag{2.52}$$

Diese Feldstärke ist exakt, $E = -\mathrm{d}\Phi$, mit elektrischem Potenzial

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} . \tag{2.53}$$

Nach dem obigen Hauptsatz ist das Wegintegral $\int_\Gamma E = \Phi(p) - \Phi(q)$ längs einer Kurve Γ von p nach q wegunabhängig. Man nennt $\int_\Gamma E =: \int_p^q E$ die elektrische Spannung zwischen den Punkten p und q.

Beispiel 2. Das Kraftfeld K des Rechenbeispiels von Abschnitt 2.5.1 ist exakt:

$$K = k_1 \mathrm{d}y + k_2 z\, \mathrm{d}z = \mathrm{d}f, \qquad f = k_1 y + k_2 z^2/2.$$

Mit Kenntnis des Hauptsatzes wäre die Berechnung des Wegintegrals $\int_\Gamma K$ kürzer ausgefallen:

$$\int_\Gamma K = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = k_1 R \sin(a) + k_2 L^2/2 .$$

2.5.3 Anschauliche Deutung des Hauptsatzes

Wir wissen aus Abschnitt 1.4, dass wir Linearformen $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch Ebenenscharen veranschaulichen können – in dieser bildlichen Vorstellung wird der Funktionswert $\lambda(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen bestimmt. In Abschnitt 2.4.2 haben wir dann gesehen, wie die Ebenenschar zu $\lambda \equiv (\mathrm{d}f)_p$ durch Linearisierung der Niveauflächen der Funktion f im Punkt p entsteht. Diese Deutung des Differenzials $\mathrm{d}f$ in Verbindung mit der anschaulichen Definition des Wegintegrals einer 1-Form in Gl. (2.45) lässt eine intuitive Deutung des Hauptsatzes zu.

Deutung (des Hauptsatzes). Beim Integrieren einer exakten 1-Form $\alpha = \mathrm{d}f$ führt die Prozedur des "Abzählens gekreuzter Ebenen" (im differenziellen Limes, $N \to \infty$) insgesamt dazu, dass gekreuzte Niveauflächen gezählt werden, das Integral $\int_p^q \mathrm{d}f$ also die Niveau-Zunahme/Abnahme $f(q) - f(p)$ berechnet.

2.5.4 Wegintegral eines Vektorfeldes

Das Wegintegral einer 1-Form ist immer erklärt, sofern der Raum affin ist (oder allgemeiner: eine differenzierbare Struktur hat). Anders im Falle eines Vektorfeldes! Um Vektorfelder längs Kurven zu integrieren, muss man die Geometrie des Raumes kennen und heranziehen. Sei $X = E_n$ im Folgenden ein Euklidischer Raum. Aus Abschnitt 2.4.1 ist uns schon der Euklidische Isomorphismus $\mathcal{I}$ zwischen Vektorfeldern und 1-Formen bekannt.

Definition. Sei $u \equiv \vec{u} : X \to V$ ein Vektorfeld in einem Euklidischen Raum X mit Euklidischem Differenzvektorraum V. Das Wegintegral $\int_\Gamma \vec{u} \cdot d\vec{r}$ von u längs einer Kurve Γ ist erklärt durch

$$\int_\Gamma \vec{u} \cdot d\vec{r} := \int_\Gamma \mathcal{I}(u). \tag{2.54}$$

Zur Berechnung des Wegintegrals des Vektorfeldes u gehen wir also zur entsprechenden 1-Form $\mathcal{I}(u)$ über und integrieren dann die 1-Form in der uns bekannten, natürlichen Weise. □

Als Konsequenz des Hauptsatzes über Wegintegrale exakter 1-Formen ergibt sich:

Satz. Für das Wegintegral eines Gradientenfeldes $\vec{\nabla} f$ längs einer Kurve Γ von p nach q gilt

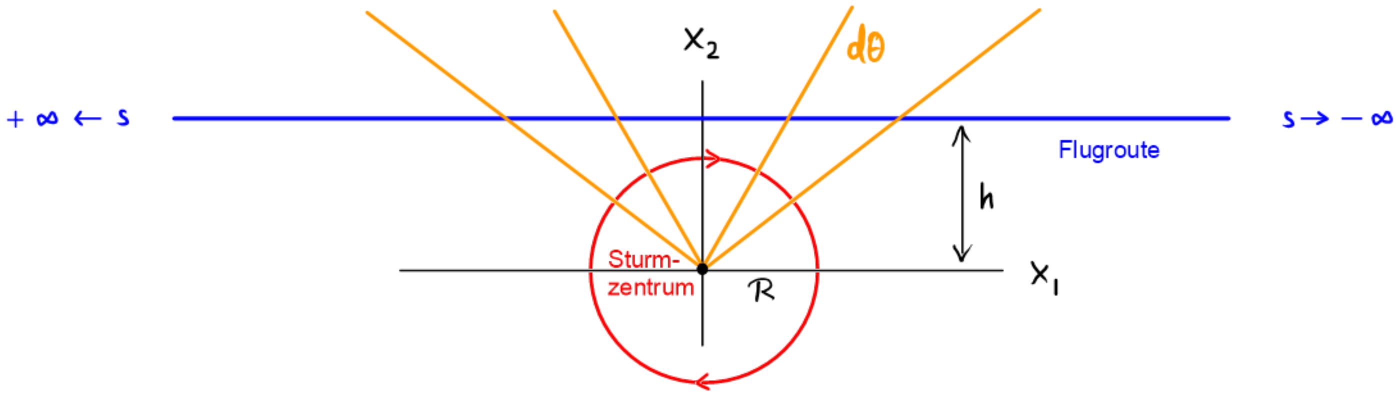
$$\int_\Gamma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(q) - f(p). \tag{2.55}$$

Beweis. $\int_\Gamma \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \mathcal{I}(\mathrm{grad} f) = \int_\Gamma \mathrm{d} f = f(q) - f(p)$.

Rechenbeispiel. Ein Langstrecken-Flugzeug soll die Randzone eines Wirbelsturms (Hurricane) von Ost nach West durchfliegen. Die kürzeste Flugroute verläuft nördlich des Wirbelsturms in der nördlichen Hemisphäre (wo große Stürme am Boden im Gegenuhrzeigersinn, in der Reiseflughöhe von 10 km oder darüber aber im Uhrzeigersinn wirbeln), weshalb vor dem Start zusätzliches Kerosin getankt werden muss, um den durch Gegenwind verursachten Mehrbedarf an Energie zu decken. Für eine grobe Abschätzung des Mehrbedarfs legen wir das Sturmzentrum in den Koordinatenursprung eines Systems ebener Polarkoordinaten $x_1 = r\cos\theta$ und $x_2 = r\sin\theta$ und nehmen eine Flugroute Γ längs $x_2 = h = \text{const}$ an. Das vom Wirbelsturm erzeugte, zusätzliche Kraftfeld K^H (infolge von Gegenwind und Reibung, bei vorgegebener Reisefluggeschwindigkeit) sei

$$K^\mathrm{H} = -f(r)\,\mathrm{d}\theta, \quad f(r) = kr^2 \mathrm{e}^{-(r/R)^2}.$$

Da K^H keine konservative Kraft ist, hilft uns der Hauptsatz nicht weiter und wir sind gezwungen, wirklich zu rechnen. Wir parametrisieren die Flugroute durch $x_1(\gamma(s)) = -hs$ und $x_2(\gamma(s)) = h$.



Nehmen wir eine totale Flugstrecke von $L \gg R$ an, dann machen wir einen vernachlässigbaren Fehler, wenn wir s die gesamte Zahlenachse $\mathbb{R}$ durchlaufen lassen (siehe Skizze). So haben wir

$$r^2(\gamma(s)) = h^2(1 + s^2), \quad \tan\theta(\gamma(s)) = -1/s.$$

Mit der Zwischenrechnung

$$(r^2\mathrm{d}\theta)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = h^2(1+s^2)\frac{d}{ds}\arctan(-1/s) = h^2$$

erhalten wir dann das Arbeitsintegral

$$-\int_\Gamma K^\mathrm{H} = -\int_\mathbb{R} K^\mathrm{H}_{\gamma(s)}(\gamma'(s))ds = kh^2 \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-(1+s^2)\,h^2/R^2} ds = \sqrt{\pi} khR\, \mathrm{e}^{-h^2/R^2}.$$

Jetzt berechnen wir das gleiche Integral ein zweites Mal und zwar so, wie es die meisten Benutzer des Vektorkalküls (ohne 1-Formen) täten. Diese Rechnung beginnt damit, dass man die

Kraft als Vektorfeld präsentiert bekommt:

$$\vec{K}^{\mathrm{H}} = -\frac{f(r)}{r}\,\widehat{e}_\theta\,.$$

Dann parametrisiert man die Flugroute z.B. als gleichförmig geradlinige Bewegung:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = o - vte_1 + he_2\,, \quad \gamma'(t) = -ve_1\,.$$

Weiter muss das Euklidische Skalarprodukt des Vektorfeldes $\vec{K}^{\mathrm{H}}$ mit dem Linienelement $d\vec{r}$ berechnet werden:

$$\vec{K}^{\mathrm{H}} \cdot d\vec{r} = -\frac{f(r)}{r}\,\langle \widehat{e}_\theta, -ve_1\rangle dt = -v\frac{f(r)}{r}\sin\theta\,dt.$$

Dieser Ausdruck ist längs der Flugroute $\gamma(t)$ auszuwerten. Dazu benötigen wir

$$r(\gamma(t)) = \sqrt{(vt)^2 + h^2}, \quad \sin\theta(\gamma(t)) = \frac{h}{\sqrt{(vt)^2 + h^2}}.$$

Einsetzen ergibt schließlich das Arbeitsintegral

$$-\int_\Gamma \vec{K}^{\mathrm{H}} \cdot d\vec{r} = kv \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{v^2t^2 + h^2}\,\mathrm{e}^{-(v^2t^2+h^2)/R^2}\,\frac{hdt}{\sqrt{v^2t^2 + h^2}}\,.$$

Nach Substitution $s = vt$ und Kürzen der Wurzelfaktoren resultiert das Integral von zuvor.

Fußnote. (Spätestens) seit Carl Friedrich Gauß kennt man das (nach ihm benannte) Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2} dx = 1. \tag{2.56}$$

Durch die Variablensubstitution $y = x\sqrt{\pi/a}$ (für $a > 0$) erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ay^2} dy = \sqrt{\pi/a}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\pi/a}\,. \tag{2.57}$$