2.6 Flächenintegrale

Die passenden Integranden für Flächenintegrale sind weder Vektorfelder noch 1-Formen, sondern sogenannte 2-Formen.

2.6.1 2-Formen

In Abschnitt 2.3 haben wir gelernt, dass 1-Formen räumlich variable Linearformen sind. Ganz analog sind 2-Formen räumlich variable alternierende 2-lineare Formen.

Definition. Eine 2-Form ω auf einem affinen Raum $(X, V, +)$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : \quad X \to \mathrm{Alt}^2(V), \quad p \mapsto \omega_p \,, \tag{2.58}$$

die jedem Punkt p eine alternierende 2-lineare Form ω_p zuweist.

Beispiel. Ein physikalisch wichtiges Beispiel für eine 2-Form im Euklidischen Raum E_3 ist die magnetische Feldstärke B. Wir erinnern daran (siehe Abschnitt 1.9), dass man sich eine alternierende 2-lineare Form als eine Geradenschar (in 3 Raumdimensionen) vorstellen kann. Das gleiche Bild taugt für ein homogenes Magnetfeld B als räumlich konstante 2-Form. Auch im allgemeinen Fall eines nichthomogenen Magnetfelds B taugt die Vorstellung von (jetzt nicht mehr geraden) Linien; diese werden als magnetische Flusslinien bezeichnet.

Definition. Unter dem äußeren Produkt zweier 1-Formen α und β versteht man die 2-Form $\alpha \wedge \beta$, wobei das äußere Produkt punktweise erklärt ist:

$$(\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p \,. \tag{2.59}$$

Insbesondere gilt

$$(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)_p = (\mathrm{d}x)_p \wedge (\mathrm{d}y)_p = \vartheta_x \wedge \vartheta_y \,, \quad \text{usw.} \tag{2.60}$$

Bei der Multiplikation einer 2-Form ω mit einer Funktion f entsteht eine neue 2-Form, $f\omega$:

$$(f\omega)_p = f(p)\, \omega_p \,. \tag{2.61}$$

Mit der punktweisen Definition der Multiplikation werden alle Eigenschaften der Skalarmultiplikation und äußeren Multiplikation (von alternierenden Multilinearformen) übertragen; so gilt zum Beispiel für eine Funktion f und zwei 1-Formen α und β die Relation

$$f\,(\alpha \wedge \beta) = (f\alpha) \wedge \beta \equiv f\alpha \wedge \beta \,. \tag{2.62}$$

Koordinatendarstellung. Es sei ein Satz von Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$ mit Koordinatenformen $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ gegeben. Dann sind die geordneten äußeren Produkte $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ für $1 \leq i < j \leq n$ elementar in dem Sinn, dass eine allgemeine 2-Form ω als Linearkombination derselben dargestellt werden kann:

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \,. \tag{2.63}$$

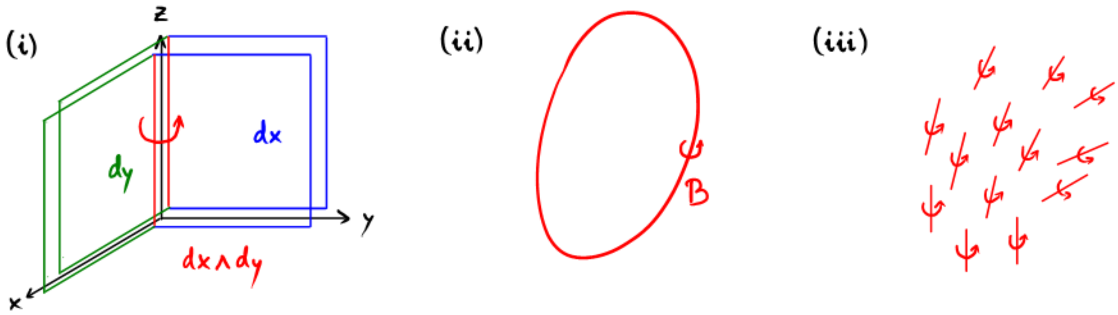
Für das zweite Gleichzeitszeichen wird benützt bzw. angenommen, dass gilt

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}\,. \tag{2.64}$$

Insbesondere hat man

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_j = 0, \quad \omega_{jj} = 0. \tag{2.65}$$

Visualisierung. Wir deuten kurz an, wie man sich 2-Formen im dreidimensionalen Raum anschaulich vorstellen kann. (i) Man bekommt die Geradenschar der konstanten 2-Form $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, indem man die Niveauflächen der Koordinatenfunktion x mit den Niveauflächen der Koordinatenfunktion y schneidet. Die Geraden dieser Schar liegen parallel zur z-Achse.



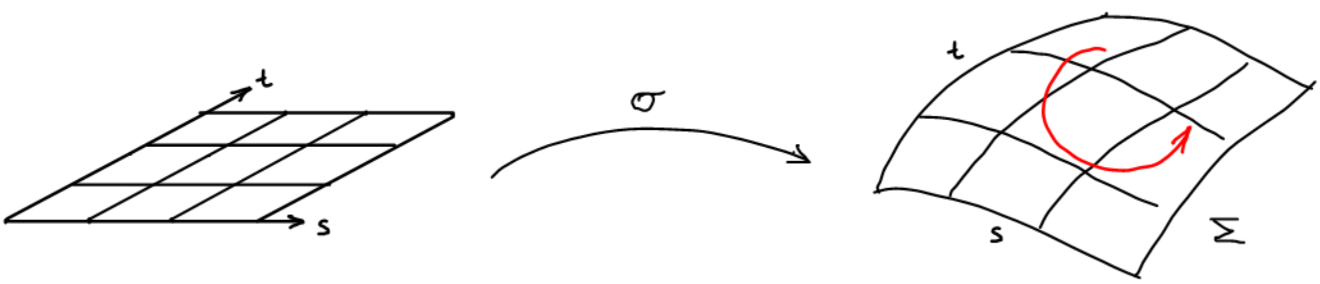
(ii) Die 2-Form der magnetischen Feldstärke B besteht aus magnetischen Flusslinien. Aufgrund einer speziellen Eigenschaft von B (nämlich: B ist "geschlossen", $\mathrm{d}B = 0$; siehe Abschnitt 2.7.1) haben diese Linien keinen Anfang und kein Ende. (iii) Auch eine ganz allgemeine 2-Form ω im dreidimensionalen Raum lässt sich als System von Linien visualisieren. Im allgemeinen Fall ($\mathrm{d}\omega \neq 0$) sind diese Linien aber nicht geschlossen, d.h. sie können sehr wohl anfangen und enden. Alternativ kann man sich vorstellen, dass die "Liniendicke" variiert. [Die Begründung zu (ii) und (iii) wird in den folgenden Abschnitten gegeben.]

2.6.2 Integral einer 2-Form

Eine orientierte Fläche ist (vereinfacht ausgedrückt) eine Fläche mit Zirkulationssinn. Eine Parametrisierung einer orientierten (Quader-)Fläche Σ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\sigma: \ [0,1]^2 \to \Sigma \subset X, \quad (s,t) \mapsto \sigma(s,t), \tag{2.66}$$

mit der Eigenschaft, dass das geordnete Paar von Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial s}\sigma(s,t)$, $\frac{\partial}{\partial t}\sigma(s,t)$ den Zirkulationssinn der Fläche Σ nachbildet. ("Geordnet" bedeutet hier, dass es auf die Reihenfolge der Tangentialvektoren ankommt.)



Definition. Es sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum und $\omega : X \to \mathrm{Alt}^2(V)$ eine 2-Form. Ist $\sigma : [0,1]^2 \to \Sigma \subset X$ eine Parametrisierung der Fläche Σ, so ist das Integral von ω über Σ erklärt durch das iterierte (Riemann-)Integral

$$\int_\Sigma \omega := \int_0^1 \left(\int_0^1 \omega_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) \right) dt \right) ds \,. \tag{2.67}$$

Mitteilung. Diese Definition ist von der Wahl der Parametrisierung unabhängig.

Beispiel. Wir integrieren die konstante magnetische Feldstärke $B = B_0 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ (mit $B_0 \in \mathbb{R}$) über eine Hemisphäre S_+ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung o und Parametrisierung

$$\sigma(s,t) = o + R \sin(\pi s/2) \left(\cos(2\pi t)\, e_x + \sin(2\pi t)\, e_y\right) + R \cos(\pi s/2)\, e_z \,.$$

Zunächst bestimmen wir den Tangentialvektor zur s-Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t) = \tfrac{1}{2} R\pi \cos(\pi s/2) \big(\cos(2\pi t)\, e_x + \sin(2\pi t)\, e_y\big) - \tfrac{1}{2} R\pi \sin(\pi s/2)\, e_z \,,$$

und den Tangentialvektor zur t-Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) = 2R\pi \sin(\pi s/2) \big(- \sin(2\pi t)\, e_x + \cos(2\pi t)\, e_y \big).$$

Dann setzen wir die Tangentialvektoren in die 2-Form ein:

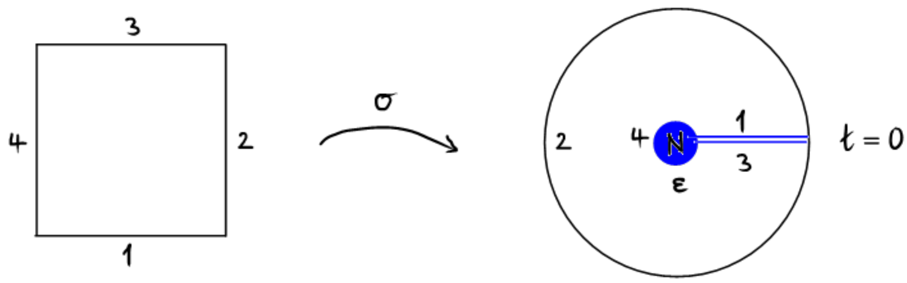
$$\begin{aligned} B_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) \right) &= B_0\, R^2 \pi^2 \sin(\pi s/2) \cos(\pi s/2) \big(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t) \big) \\ &= \tfrac{1}{2} B_0\, (\pi R)^2 \sin(\pi s) \,. \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir das Flächenintegral:

$$\int_{S_+} B = \tfrac{1}{2} B_0 (\pi R)^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi s)\, dt \right) ds = B_0\, \pi R^2.$$

Bemerkung 1. Es ist kein Zufall, dass das Ergebnis dieser Rechnung dem Produkt aus konstanter Feldstärke B_0 und Kreisfläche πR^2 (Projektion der Hemisphäre auf die xy-Ebene) gleich ist. Den zugehörigen mathematischen Hintergrund (Satz von Gauss) werden wir später kennenlernen.

Bemerkung 2. Die obige Definition des Flächenintegrals ist auf unser Beispiel anwendbar, auch wenn die Hemisphäre nicht in die Klasse der Quaderflächen fällt. Dazu entfernt man eine Kreisscheibe vom Radius ε mit Mittelpunkt im Nordpol und schneidet die Hemisphäre (z.B. längs der Koordinatenlinie $t = 0$) auf. Auf diese Weise entsteht eine Quaderfläche. Die ursprüngliche Hemisphäre gewinnt man im Limes $\varepsilon \to 0$ (nach Zusammenkleben längs $t = 0$) zurück.



2.6.3 Flächenintegral eines Vektorfeldes

Durch punktweise Anwendung der Abbildung $\mathcal{I}_2$ von Abschnitt 1.16 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_2 : \text{ Vektorfelder } \longrightarrow \text{ 2-Formen.} \tag{2.68}$$

Beispiel. Der 2-Form der magnetischen Feldstärke

$$B = B_{xy}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B_{yz}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B_{zx}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \tag{2.69}$$

wird durch $\mathcal{I}_2^{-1}$ das Vektorfeld des Magnetfeldes zugeordnet:

$$\mathcal{I}_2^{-1}(B) = B_{xy}\partial_z + B_{yz}\partial_x + B_{zx}\partial_y \equiv B_z\partial_z + B_x\partial_x + B_y\partial_y\,. \tag{2.70}$$

Definition. Es sei $v \equiv \vec{v} : \ E_3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und Σ eine orientierte Fläche in E_3. Das Flächenintegral $\int_\Sigma \vec{v} \cdot d^2\vec{n}$ von v über Σ ist erklärt durch

$$\int_\Sigma \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_\Sigma \mathcal{I}_2(v). \tag{2.71}$$

Man konvertiert also das Vektorfeld v in die 2-Form $\mathcal{I}_2(v)$ und integriert dann letztere in der uns schon bekannten Weise.

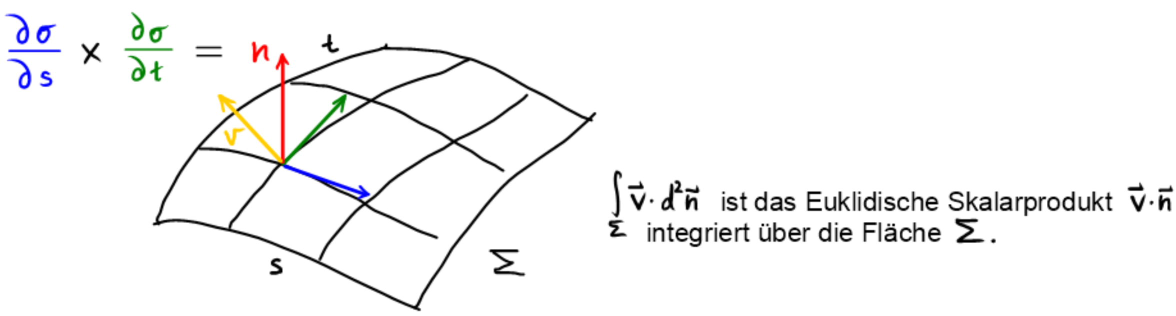
Bemerkung. Aus der Formel $\mathcal{I}_2(v) = \Omega(v, \cdot, \cdot)$ erhalten wir den Ausdruck

$$\int_\Sigma \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \Omega\left(v\big(\sigma(s,t)\big), \frac{\partial}{\partial s}\sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma(s,t) \right) dt \right) ds\,. \tag{2.72}$$

Im Flächenintegral eines Vektorfeldes v integriert man also das Spatvolumen der drei Vektorfelder $v, \frac{\partial}{\partial s}\sigma, \frac{\partial}{\partial t}\sigma$. Wegen $\Omega(u,v,w) = \langle u, v \times w\rangle$ ist eine äquivalente Aussage, dass man im Flächenintegral das Euklidische Skalarprodukt von v mit dem Vektorfeld

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma(s,t) \times \frac{\partial}{\partial t}\sigma(s,t) \tag{2.73}$$

integriert. Laut Definition des Vektorprodukts steht letzteres überall senkrecht auf der Integrationsfläche Σ.



2.7 Rotation

Nach dem Gradienten werden wir jetzt einen zweiten Vektor-Differenzialoperator kennenlernen: die Rotation “rot” (engl. “curl”). Dieser Differenzialoperator ist eine Spezialität von E_3. Um die Rotation in angemessener Weise einzuführen, müssen wir zuerst den allgemeinen Ableitungsbegriff für 1-Formen kennenlernen.

2.7.1 Äußere Ableitung einer 1-Form

Es sei X ein n-dimensionaler affiner Raum. Ist X mit einer Basis $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ von Koordinatenformen ausgestattet, dann ist jede 1-Form α auf X darstellbar als Linearkombination

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{d}x_i \tag{2.74}$$

mit Komponenten $\alpha_i : \ X \to \mathbb{R}$.

Definition. Die äußere Ableitung einer 1-Form $\alpha = \sum \alpha_i \,\mathrm{d}x_i$ ist die 2-Form

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x_i \,. \tag{2.75}$$

Bemerkung. Einen äquivalenten Ausdruck erhält man mit $\mathrm{d}\alpha_i = \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j$ durch Verwenden der Schiefsymmetrie $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ des äußeren Produkts:

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \,. \tag{2.76}$$

Für den Fall einer 1-Form $E = E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z$ im dreidimensionalen Raum E_3 hat man

$$\mathrm{d}E = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \,. \quad \square \tag{2.77}$$

Die äußere Ableitung lässt sich in sehr anschaulicher Weise deuten (siehe später). Sie hat die charakteristische Eigenschaft "Zweimal d gibt Null", was im vorliegenden Kontext Folgendes bedeutet.

Fakt. Die äußere Ableitung einer exakten 1-Form $\alpha = \mathrm{d}f$ verschwindet:

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0 \,. \tag{2.78}$$

Beweis. Nach obiger Formel folgt die Aussage sofort aus der Schwarz'schen Regel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Letztere ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition von partieller Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (p) &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(p + s\, e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \right) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \big(f(p + s\, e_i + t\, e_j) - f(p + s\, e_i) - f(p + t\, e_j) + f(p) \big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p) \,. \quad \square \end{aligned}$$

Man verwendet auch die kürzere Schreibweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} \,. \tag{2.79}$$