Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 1

WS 2014/15

Abgabe: 14.10.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 16.10./17.10. in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

5. Basistransformation

Es seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ und $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ zwei Basen eines reellen Vektorraumes. Es sollen die Beziehungen

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,,\ \mathbf{v}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 \quad \text{gelten.}$$

a) Geben die Komponentendarstellungen von $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ und $\mathbf{v}'_3$ bezüglich $\mathcal{B}$ an.

b) Geben Sie eine geometrische Deutung dieser Transformation. Welche Rolle spielt dabei $\mathbf{v}_3$?

c) Berechnen Sie die Komponentendarstellungen von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

d) Transformieren Sie die Komponentendarstellungen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'},\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

in die jeweils andere Basis.

6. Walfisch mit anderer Basis

Ein Wal schwimmt im Atlantik erst 10 Stunden mit 5 km/h nach Süden, dann 3 Stunden mit 10 km/h nach Nordwesten und schließlich 1 Stunde mit 12 km/h nach Osten. Wählen Sie für die Komponentendarstellung folgende Basis:

$$\text{Nordostrichtung} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{v_1} \text{ und Nordwestrichtung} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{v_2}\,.$$

a) Geben Sie die Geschwindigkeitsvektoren für die drei Teilstrecken an.

b) Um welchen Vektor verschiebt sich die Position des Wales insgesamt?

c) Wiederholen Sie die Rechnungen von Teil a und b; nehmen Sie jedoch zusätzlich an, dass der Wal sich mit den angegebenen Geschwindigkeiten relativ zum Golfstrom bewegt, der mit 5 km/h nach Osten fließt.

d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit jenen aus Aufgabe 3.

7. Lineare Abhängigkeit

a) Es sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ eine Basis eines zweidimensionalen reellen Vektorraumes und

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ und } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Überprüfen Sie, ob die Mengen $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, $\{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ und $\{\mathbf{u_3}, \mathbf{u_1}\}$ ebenfalls Basen sind.

b) Es sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ eine Basis eines dreidimensionalen reellen Vektorraumes und

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ und } \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Überprüfen Sie, ob die Mengen $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ und $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_4}\}$ ebenfalls Basen sind.

8. Differenzieren

In dieser Aufgabe wird „Differenzieren aus der Schule“ mittels Kettenregel $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ und Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ wiederholt. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen und geben Sie an, welche Regel Sie jeweils benutzen.

$$x \exp(-x^2) \ , \quad \frac{1}{\sqrt{1 + 3\cos(x^3)}} \ , \quad \frac{\exp(-x^4)}{\ln(1-x)}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$