Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 2

WS 2014/15

Abgabe: 21.10.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 23.10.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

9. Dualraum

Es sei V ein zweidimensionaler reeller Vektorraum, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Basis.

a) Es sei λ die durch $\lambda(\mathbf{e}_1) = 1$ und $\lambda(\mathbf{e}_2) = 0$ definierte Linearform. Machen Sie eine Skizze: Zeichnen Sie darin $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und die zu λ gehörende Geradenschar ein (welche Eigenschaften hat diese?). Berechnen Sie $\lambda(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Zeichnung.

b) Es sei nun zusätzlich μ die durch $\mu(\mathbf{e}_1) = 1$ und $\mu(\mathbf{e}_2) = 1$ definierte Linearform. Fertigen Sie erneut eine Skizze an, in die Sie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, λ und μ einzeichnen. Konstruieren Sie dann die Geradenschar für $\lambda + \mu$. Berechnen $(\lambda + \mu)(\mathbf{e}_1)$ sowie $(\lambda + \mu)(\mathbf{e}_2)$ und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse anhand der Zeichnung.

c) Die Duale Basis zu $\mathcal{B}$ ist durch die Linearformen $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ mit $\vartheta_1(\mathbf{e}_1) = 1$, $\vartheta_1(\mathbf{e}_2) = 0$, $\vartheta_2(\mathbf{e}_1) = 0$ und $\vartheta_2(\mathbf{e}_2) = 1$ gegeben. Es sei $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2\}$ mit $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ eine weitere Basis von V. Geben Sie nun die duale Basis $\{\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2\}$ zu $\tilde{\mathcal{B}}$ an und drücken Sie diese durch ϑ_1 und ϑ_2 aus.
Hinweis: Berechnen Sie $\tilde{\vartheta}_i(\mathbf{e}_j)$ und vergleichen Sie mit $(a\,\vartheta_1 + b\,\vartheta_2)(\mathbf{e}_j)$.

10. Affiner Raum

Es sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum und $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Basis von V. Erinnerung: das bedeutet, M ist eine Menge, V ein Vektorraum, und $+$ ist eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Abbildung von $M \times V$ nach M.

a) Unser Koordinatensystem sei $\{p_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Zeichnen Sie das durch die Parametrisierung

$$\gamma : [-2, 2] \to M$$
$$t \mapsto p_0 + t\,\mathbf{e}_1 + t^2\,\mathbf{e}_2$$

gegebene geometrische Objekt. Geben Sie $x_1\big(\gamma(t)\big)$ und $x_2\big(\gamma(t)\big)$ an.
Hinweis: Per Definition der zum Koordinatensystem gehörenden Koordinatenfunktionen x_1 und x_2 ist $x_1\big(p_0 + a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2\big) = a$ und $x_2\big(p_0 + a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2\big) = b$.

b) Sei nun ein zweites Koordinatensystem $\{p_0'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ mit $p_0' = p_0 + \mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2$ gegeben. Die zu diesem Koordinatensystem gehörenden Koordinatenfunktionen seien x_1' und x_2'. Bestimmen Sie:

$$x_2\big(p_0\big)\,,\ x_1\big(p_0'\big)\,,\ x_2\big(p_0' + 3\,\mathbf{e}_1' - 2\,\mathbf{e}_2'\big) \text{ und } x_2'\big(p_0 - 1\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2\big)$$

c) Zeigen Sie explizit, dass für einen Punkt $q \in M$ und Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1(q + a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2) = x_1(q) + a\,,\; x_2(q + a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2) = x_2(q) + b$$

11. Lineare Abbildungen

Betrachten Sie noch einmal die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ aus Aufgabe 3, bei der $\mathbf{v}_1$ der Nord- und $\mathbf{v}_2$ der Ostrichtung entsprach.

a) Finden Sie bzgl. $\mathcal{B}$ die Matrixdarstellungen folgender linearer Abbildungen:

- Einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn, d.h. die Nord- wird auf die Westrichtung und die Ost- auf die Nordrichtung abgebildet.
- Der durch $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = 5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$ definierten Abbildung.

b) Berechnen Sie für beide Abbildungen die Bilder der Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\,,\; \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\,,\; \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

12. Funktionsvektorraum II

Betrachten Sie die Menge $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ mit den in Aufgabe 2 definierten Verknüpfungen. $(U, \oplus, \odot)$ wird so zu einem reellen Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{x^0, x^1, x^2\}$ eine Basis von U ist. Dabei gelten die Bezeichnungen

$$x^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto 1, \quad x^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x \text{ und } x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2.$$

Hinweis: Dazu müssen Sie zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist und zudem U erzeugt, d.h. dass jede Funktion in U sich als Linearkombination aus Elementen von $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

b) Rechnen Sie nach, dass

$$\mathcal{B}^* = \{x_0 : U \to \mathbb{R}; x_0(f) = f(0),\;\; x_1 : U \to \mathbb{R}; x_1(f) = f'(0),\;\; x_2 : U \to \mathbb{R}; x_2(f) = \frac{1}{2}f''(0)\}$$

die zu $\mathcal{B}$ duale Basis ist.

Im Folgenden betrachten wir die Abbildung

$$D : U \to U; f \mapsto f',$$

die einer Funktion in U ihre Ableitungsfunktion zuordnet.

c) Begründen Sie, dass D linear ist.

d) Bestimmen Sie die Bilder der Basisvektoren unter D und geben Sie diese als Spaltenvektoren zur Basis $\mathcal{B}$ an.

e) Geben Sie die Matrixdarstellung von D bzgl. $\mathcal{B}$ an.