Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 3

WS 2014/15

Abgabe: 28.10.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 30.10.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/mm1415

Wenn Sie eine Altzulassung haben, die nicht in KLIPS angezeigt wird, so müssen Sie sich an Frau Herrmann (Prüfungsamt) wenden. Wir haben keinerlei Zugriff auf KLIPS und können Ihre Angaben weder überprüfen noch Ihnen weiterhelfen.

13. Norm

Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine Basis. Für einen Vektor $u = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$ sei eine Norm durch $||u|| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2}$ erklärt. Es sei nun $n = 4$ und $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_4$.

a) Berechnen Sie $||\mathbf{u}_1||$ und $||\mathbf{u}_2||$.

b) Überprüfen Sie für $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ die Dreiecksungleichung.

c) Weiterhin sei $(M, V, +)$ ein affiner Raum und $p \in M$. Berechnen Sie den Abstand zwischen p und $p + 20\mathbf{u}_1 + 15\mathbf{u}_2$.

14. Lineare Abbildungen II

Seien U und V zwei Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ bzw. $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$. Die Dualbasis zu $\mathcal{B}_V$ sei $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$, diejenige zu $\mathcal{B}_U$ sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
Hinweis: Im Gegensatz zu Aufgabe 11 werden die Abbildungen hier durch eine Abbildungsvorschrift definiert. Die Bilder der Basisvektoren müssen Sie also zunächst ausrechnen.

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der linearen Abbildungen $A : V \to V$, $B : V \to U$ und $C : U \to V$, gegeben durch

$$\begin{aligned} A\,v &= \mathbf{v_1}\vartheta_2(v) - \mathbf{v_2}\vartheta_1(v)\,, \\ B\,v &= \mathbf{u_1}\vartheta_1(v) + \mathbf{u_2}\vartheta_2(v) \qquad \text{und} \\ C\,u &= (2\,\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2})\,(\varphi_1(u) + \varphi_3(u)) \end{aligned}$$

in den jeweils angegebenen Basen.

b) Berechnen Sie $A(\mathbf{v_1} + 2\,\mathbf{v_2})$, $B(-3\,\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$ und $C(\mathbf{u_1} + 2\,\mathbf{u_2} - \mathbf{u_3})$.

c) Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll? Berechnen Sie deren Matrixdarstellung.

$$A \circ B, \qquad B \circ A, \qquad A \circ C, \qquad B \circ C, \qquad C \circ B$$

15. Alternierende 2-lineare Formen

Es sei $(V, +)$ ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Weiterhin sei $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis.

a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$ und $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$. Geben Sie die Definition von $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ an. Was gilt demnach für $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)$?

b) Berechnen Sie $(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ und $\big((2\vartheta_2 - \vartheta_3) \wedge (\vartheta_1 + \vartheta_2)\big)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

16. -

Diese Aufgabe wird gestrichen, da der nötige Stoff nicht in dieser Woche bereitgestellt wird.

17. Skalarprodukte

Es sei $(V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, d.h. es gelte $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Ferner sei $\{\vartheta_x, \vartheta_y\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis.

a) Bestimmen Sie die Länge der Vektoren

$$u = 3\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y \qquad v = -5\mathbf{e}_x + 9\mathbf{e}_y \qquad w = 7\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$$

sowie alle möglichen Winkel.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$b : V \times V \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto \vartheta_x(u)\vartheta_x(v) - 2\vartheta_x(u)\vartheta_y(v) - 2\vartheta_y(u)\vartheta_x(v) + 5\vartheta_y(u)\vartheta_y(v).$$

b) Zeigen Sie zunächst, dass man mit $u = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ und $v = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$ auch

$$b(u, v) = xx' - 2xy' - 2x'y + 5yy'$$

schreiben kann.

c) Zeigen Sie, dass b auch ein Skalarprodukt auf V ist.

d) Berechnen Sie nun die Längen von $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ sowie den Winkel zwischen beiden Vektoren bzgl. b. Was fällt auf?