Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 4

WS 2014/15

Abgabe: 04.11.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 06.11.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

18. Entwickeln nach Orthonormalbasen

Sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

a) Zeigen Sie: Für jedes $\mathbf{v} \in V$ lassen sich die Komponenten bzgl. $\mathcal{B}$ durch $v_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i\rangle$ berechnen.

Wir betrachten nun den Fall $n = 3$.

b) Rechnen Sie nach, dass

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\}$$

ebenfalls eine Orthonormalbasis ist.

c) Verwenden Sie das Ergebnis von a), um folgende Vektoren zur Basis $\mathcal{C}$ auszudrücken:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

19. Spatprodukt

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Berechnen Sie das Volumen des Spats, das von den Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

aufgespannt wird.

20. Euklidische Geometrie aus Sicht der Vektorrechnung

Der euklidische Raum $(\mathbb{E}^2, \mathbb{R}^2, +)$ mit Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, wobei $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis bzgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist, ist ein Modell[1] für die Ihnen aus der Sekundarstufe I gut bekannte euklidische Geometrie. Dementsprechend sind alle Sätze, die Ihnen dort begegnet sind, auch in diesem Modell gültig; sie lassen sich mit Hilfe der Vektorrechnung jedoch mitunter leichter beweisen. Beweisen bzw. formulieren und beweisen Sie folgende Sätze:

a) Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.

b) Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebiges Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

c) Der Kosinussatz.

d) Der Satz des Thales.

e) Der Höhensatz des Euklid.

21. Matrixvektorräume und Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt

Es sei M_n die Menge aller quadratischen Matrizen mit n Zeilen (und n Spalten) mit reellen Elementen.

a) Zeigen Sie: Mit der elementweisen Verknüpfung $(A+B)_{ij} := A_{ij}+B_{ij}$ für alle $A, B \in M_n$ und der elementweisen skalaren Multiplikation $(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda A_{ij}$ für alle $A \in M_n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ wird $(M_n, +, \cdot)$ zu einem reellen Vektorraum.

b) Es sei $tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ die Spur der Matrix A, d.h. die Summe ihrer Diagonalelemente, und A^t die transponierte Matrix, d.h. $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Beispielsweise gilt

$$tr \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1+5+9 = 15 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Durch $\langle A, B \rangle := tr(A^t B)$ wird ein Skalarprodukt auf M_n definiert.
Hinweis: Es ist nützlich, zunächst $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ und $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ zu zeigen.

c) Eine Orthonormalbasis von $(M_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Drücken Sie folgende Elemente von M_2 als Spaltenvektoren bzgl. $\mathcal{B}$ aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Sie müssen analog zu 18c vorgehen!

[1] Dies bedeutet, dass eine konkrete mathematische Struktur vorliegt, die Hilberts Axiomensystem der euklidischen Geometrie genügt.