Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 5

WS 2014/15

Abgabe: 11.11.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 13.11.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/mm1415

22. Massenschwerpunkt

a) Wir betrachten den euklidischen Raum $(\mathbb{E}^3, \mathbb{R}^3, +)$ mit kartesischem Koordinatensystem $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und vereinbaren die Schreibweise $p = (x_1|x_2|x_3) := o + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ für den Punkt p. Gegeben sei folgende Anordnung von Massenpunkten:

$$m_1 = 3kg \text{ in } p_1 = (1|1|1) \qquad m_2 = 1kg \text{ in } p_2 = (-1|-2|1) \qquad m_3 = 2kg \text{ in } p_3 = (2|0|5).$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt.

b) Zeigen Sie: Ist S der Massenschwerpunkt einer beliebigen Anordnung $\{p_1, \ldots, p_n\}$ von n Punktmassen $\{m_1, \ldots, m_n\}$ in einem affinen Raum M und ist $f : M \to N$ eine affine Abbildung (N ist dabei auch ein affiner Raum mit Ursprung o'), so ist $f(S)$ der Massenschwerpunkt des Bilds der Anordnung unter f.

23. Noch mehr Skalarprodukte

Mit der Notation aus Aufgabe 17 lässt sich jede symmetrische Bilinearform auf V in der Form

$$b(u, v) = \alpha x x' + \beta x y' + \beta x' y + \delta y y'$$

mit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben. Zu einem Skalarprodukt fehlt b noch die Positivdefinitheit.
Zeigen Sie: b ist genau dann positiv definit, wenn $\alpha > 0$ und $\alpha\delta - \beta^2 > 0$ gilt.
Hinweis für Kenner: Dies ist die einfachste nicht-triviale Version des Hurwitz-Kriteriums. Skalarprodukte auf $\mathbb{R}$, aufgefasst als Vektorraum, sind natürlich witzlos, da sie durch eine einzige reelle Zahl bestimmt werden: $\alpha x^2 > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

24. Wiederholung: Integrieren

Wir werden in der Vorlesung in Kürze damit beginnen, Differenzialformen über Kurven, Flächen und Volumina zu integrieren; da sich diese Rechnungen letztlich auf eindimensionale Integrale werden zurückführen lassen, wiederholen wir an dieser Stelle das (unbestimmte) Integrieren.

a) Finden Sie mit Hilfe partieller Integration Stammfunktionen zu

$$xe^{2x} \qquad \ln(x) = 1 \cdot \ln(x) \qquad \cos^2(x) \qquad x^2 \sin(x)$$

b) Finden Sie mit Hilfe der Substitutionsregel Stammfunktionen zu

$$x^2 e^{-x^3} \qquad x\sqrt{1 + x^2} \qquad \sin(x) e^{\cos(x)} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

25. Differenzial

Es sei X ein affiner Raum und $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Basis des Differenzvektorraums V. Desweiteren fixieren wir ein Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Im Folgenden sollen Differenziale von Abbildungen von X nach X berechnet werden.
Beispiel: Eine Abbildung H von X nach X sei durch

$$H(p) = p_0 + (x_2(p) + x_1(p))^4 \, \mathbf{e}_1$$

definiert. Ihr Differenzial für $a, b \in \mathbb{R}$ und $q \in X$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
D_q H(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) &= \frac{d}{dt} H\big(q + t(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2)\big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big[p_0 + (x_2(q + t(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2)) + x_1(q + t(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2)))^4 \, \mathbf{e}_1\big]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\big[p_0 + (x_2(q) + tb + x_1(q) + ta)^4 \, \mathbf{e}_1\big]\Big|_{t=0} \\
&= 4(a+b)(x_2(q) + x_1(q) + t(a+b))^3\Big|_{t=0} \, \mathbf{e}_1 \\
&= 4(a+b)(x_2(q) + x_1(q))^3 \, \mathbf{e}_1
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $D_q H(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2)$ für die folgenden Abbildungen von X nach X:

$$\begin{aligned}
H(p) &= p_0 + [\sin(x_1(p))]^2 \, \mathbf{e}_2 \, , \\
H(p) &= p_0 + [(x_1(p))^2 - (x_2(p))^2] \, \mathbf{e}_2 \, , \\
H(p) &= p_0 + \exp[(x_1(p))^2 + (x_2(p))^2]\mathbf{e}_1 + \exp[(x_1(p))^2 - (x_2(p))^2]\mathbf{e}_2 \, .
\end{aligned}$$

b) Woran erkennt man an den Beispielen aus Aufgabenteil **a**, dass das Differenzial eine lineare Abbildung ist?