
Mathematische Methoden der Physik

Blatt 6

WS 2014/15

Abgabe: 18.11.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten

Besprechung: 20.11.2014 in den Übungsgruppen

Website: <http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/mm1415>

26. Partielle Ableitungen

Es sei X ein affiner Raum und $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Basis des Differenzvektorraums V . Desweiteren fixieren wir ein Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Im Folgenden ist f eine Funktion von X nach $\mathbb{R}$. In der Vorlesung wurden die partiellen Ableitungen definiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := D_p f(\mathbf{e}_i) = \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{e}_i)|_{t=0}.$$

a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ für $i = 1, 2$ für die folgenden Funktionen:

$$f(p) = x_1^6(p) + x_2^2(p) \quad , \quad f(p) = \exp(x_1(p)x_2(p)) \quad , \quad f(p) = \ln(x_1(p) + x_2(p))x_1^2(p).$$

Bei den Rechnungen sollte Ihnen auffallen, dass man das jeweilige Ergebnis erhält indem man direkt nach x_i (partiell) ableitet.

Weiterhin kennen Sie aus der Vorlesung die Koordinatendarstellung des Differenzials der eben diskutierten Abbildungen:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2,$$

wobei $(dx_i)_p = \vartheta_i$. Hier bezeichnet $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ die Dualbasis von $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

b) Überprüfen Sie für eine Funktion ihrer Wahl aus Aufgabenteil a), dass die Koordinatendarstellung und die bisher verwendete Methode das Differenzial zu berechnen (siehe Aufgabe 25) dasselbe Ergebnis liefern.

Nun betrachten wir Abbildungen von X nach X . Im allgemeinen ist eine solche Abbildung von der Form

$$H(p) = p_0 + f(p)\mathbf{e}_1 + g(p)\mathbf{e}_2,$$

wobei f und g Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ sind. Das Differenzial einer solchen Abbildung lässt sich also wie folgt schreiben:

$$DH = \mathbf{e}_1 Df + \mathbf{e}_2 Dg.$$

c) Berechnen Sie nun unter Verwendung der obigen Darstellung das Differenzial DH der folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} H(p) &= p_0 + [\sin(x_1(p))]^2 \mathbf{e}_2, \\ H(p) &= p_0 + \ln(x_1^2(p)x_2^2(p))\mathbf{e}_1 + \exp(x_1^2(p) + x_2^2(p))\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

27. Vektorfelder und 1-Formen

Im Folgenden arbeiten wir im dreidimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{E}_3$ mit kartesischem Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ und Koordinatenfunktionen $x(p)$, $y(p)$ und $z(p)$. Nach der Vorlesung übersetzt sich die 1-Form

$$\alpha = f dx + g dy + h dz ,$$

mit Funktionen f, g und h von $\mathbb{E}_3$ nach $\mathbb{R}$, in das Vektorfeld

$$I(\alpha) = f \mathbf{e}_x + g \mathbf{e}_y + h \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}}$$

und umgekehrt. **Vorsicht:** Diese einfache Übersetzungsregel gilt nur in kartesischen Koordinaten!

- a) Übersetzen Sie das (hoffentlich bereits aus der Schule bekannte) elektrische Feld einer Punktladung $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ in die zugehörige 1-Form E , so dass $I(E) = \vec{E}$ gilt.

Hinweis: Drücken Sie dazu $\vec{e}_r = \frac{1}{r} \vec{r}$ erst in der Basis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ aus.

Übersetzungsregeln: $\vec{r}(p) := p - p_0$, $r(p) := \|\vec{r}(p)\|$.

- b) Überprüfen Sie für $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$, dass $E = -D\phi$ und damit $I(-D\phi) = \vec{E}$ gilt.

28. Kettenregel

Seien X, Y affine Räume mit Koordinatensystemen $\{o_X; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bzw. $Y = \{o_Y; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ und affinen Koordinatenfunktionen x_1, x_2 bzw. y_1, y_2 . Wir betrachten die beiden Funktionen

$$F : X \rightarrow Y; p \mapsto o_Y + x_1^2(p) \mathbf{f}_1 + x_1(p)x_2(p) \mathbf{f}_2 \quad G : Y \rightarrow \mathbb{R}; q \mapsto y_1^3(q) \exp(y_2(q)).$$

- a) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Verkettung $G \circ F$.
- b) Berechnen das Differenzial von $G \circ F$ **direkt** mittels des zuvor erhaltenen Ausdrucks.
- c) Wiederholen Sie die Rechnung mit Hilfe der Kettenregel – dabei **muss** natürlich dasselbe herauskommen!