Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 7

WS 2014/15

Abgabe: 25.11.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 27.11.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

29. Wegintegrale

Wir betrachten den Euklidischen Raum $\mathbb{E}_2$ mit kartesischem Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$. Darin verlaufen die folgenden drei Wege $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{E}_2$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : t &\mapsto p_0 + 2t\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \\ \gamma_2 : t &\mapsto p_0 + 2t\mathbf{e_1} + (8t(1-t)-1)\mathbf{e_2} \\ \gamma_3 : t &\mapsto p_0 + R\cos(2\pi t)\mathbf{e_1} + R\sin(2\pi t)\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

mit $R \in \mathbb{R}^+$. Des Weiteren sei auf $\mathbb{E}_2$ die 1-Form $\alpha = \frac{1}{2}\left(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1\right)$ gegeben.
Erinnerung: Das ist Kurzschreibweise für $\alpha_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(x_1(p)\,(dx_2)_p(\mathbf{v}) - x_2(p)\,(dx_1)_p(\mathbf{v})\right)$.

a) Berechnen Sie $\gamma_i'(t) = \frac{d}{dt}\gamma_i(t)$ für alle drei Wege.

b) Berechnen Sie $\alpha_{\gamma_i(t)}$ und $\alpha_{\gamma_i(t)}\left(\gamma_i'(t)\right)$ für alle drei Wege.

c) Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma_i(t)}\left(\gamma_i'(t)\right) dt$ für alle drei Wege.

Anmerkung: Sie dürfen natürlich gerne erst a), b) und c) für γ_1 bearbeiten, dann für die anderen beiden Wege.

30. Exakte 1-Form

Seien $\mathbb{E}_2$ und γ_i wie in Aufgabe 29. Die uns hier interessierende 1-Form sei $\beta = -x_1\, dx_1 - x_2\, dx_2$.

a) Zeigen Sie, dass β exakt ist. Finden Sie dazu eine Funktion $\Phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}$ mit $d\Phi = \beta$.
Hinweis: Raten von Φ ist erlaubt, der Ansatz $\Phi(x) = \int_{\gamma_x} \beta$, wobei γ_x ein beliebiger Weg von p_0 zu x ist, liefert aber einen guten Kandidaten.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} \beta$ für die drei Wege aus Aufgabe 29 mit allen zur Verfügung stehenden Mitteln.

c) Ist α aus Aufgabe 29 ebenfalls exakt? Warum (nicht)?

d) Zeichnen Sie β, $\mathcal{I}(\beta)$ und die drei Wege γ_i. Orientierungen nicht vergessen!

Interpretation: Φ könnte z.B. die Höhe eines nicht zu zerklüfteten Berges in Abhängigkeit der horizontalen Position beschreiben. $\beta = d\Phi$ ist dann die lokale Steigung des Berges. Die Linien, mit denen man β visualisiert, sind die Wege, entlang deren Tangenten β zu null ausgewertet wird; es sind die Höhenlinien. $\int_\gamma \beta_i$ berechnet den auf dem Weg γ erklommenen Höhenunterschied. $\mathcal{I}(\beta) = \mathrm{grad}\Phi$ ist ein Vektorfeld, das jeweils in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt, und dessen Länge die Stärke der Steigung angibt.

31. Parametrisierungen

Wir betrachten den Euklidischen Raum $\mathbb{E}_3$ mit einem affinen Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung des Einheitskreises in der x-y-Ebene um den Ursprung. Die Umlaufrichtung sei entgegen dem Uhrzeiger, gesehen aus der positiven z-Richtung.

b) Geben Sie eine Parametrisierung einer Spirale in der x-y-Ebene an, die im Ursprung beginnt und deren Radius proportional zum durchlaufenen Winkel wächst. Beschränken Sie sich auf zwei Umläufe im Gegenuhrzeigersinn, gesehen aus der positiven z-Richtung.

32. Kraftfelder

Wir betrachten wieder den Euklidischen Raum $\mathbb{E}_3$ mit einem kartesischen Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ und zugehörigen Koordinatenfunktionen x, y und z. Berechnen Sie zu den gegebenen Potenzialen $U : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$ jeweils das Kraftfeld $F = -dU$ und das Beschleunigungsvektorfeld $\vec{F} = I_1(F) = -\mathrm{grad}\, U$. U_0, m, g und r_0 sind Zahlen in geeigneten Einheiten.

Beispiel: $U = U_0 r_0\,(x^2{+}y^2{+}z^2)^{-\frac{1}{2}}$ (Kurzschreibweise für $U(p) = U_0 r_0\,\big(x(p)^2 + y(p)^2 + z(p)^2\big)^{-\frac{1}{2}}$), das Potenzial einer Punktladung, führt zu $F = U_0 r_0\,(x dx + y dy + z dz)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ und $\vec{F} = U_0 r_0\,(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$, siehe Aufgabe 27.

a) Homogenes Gravitationsfeld: $U = mgz$

b) Feld eines geladenen Drahtes: $U = U_0 \,\ln\left(\frac{x^2+y^2}{r_0^2}\right)$

c) Longitudinale Welle: $U = U_0\,\sin(x/r_0)$

d) Potenzialtopf: $U = -U_0\,\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{r_0^2}\right)$

e) Dipolfeld: $U = U_0 r_0^2\; z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$