Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 8

WS 2014/15

Abgabe: 02.12.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 04.12.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

33. Die Jacobi-Matrix

Wie Ihnen aus der Vorlesung und der Übung bereits wohlbekannt ist, liefert das Differential dF einer Funktion $F : X \to Y$ zwischen affinen Räumen für jeden Punkt $p \in X$ eine lineare Abbildung zwischen den Differenzvektorräumen U und V von X und Y – und zwar diejenige, die F in p am besten linear approximiert.
Sie wissen andererseits auch, dass lineare Abbildungen nach dem Fixieren von Basen Matrixdarstellungen besitzen. Seien $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$, $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$ Basen von U, V. Die Koordinaten von X seien $x_1, \ldots x_m$ und $y_1, \ldots, y_n$ diejenigen von Y. Ziel dieser Aufgabe ist es, die darstellende Matrix von d_pF zu berechnen.

a) Ein allgemeines F hat den Funktionsterm

$$F(x_1, \ldots x_m) = o_Y + \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1, \ldots x_m)\mathbf{f}_i$$

mit n differenzierbaren Funktion $F_i : X \to \mathbb{R}$. Geben Sie dF an.
Beachten Sie dabei, dass dies die von nun an verwendete Kurzschreibweise für

$$F(p) = o_Y + \sum_{i=1}^{n} F_i(x_1(p), \ldots x_m(p))\mathbf{f}_i$$

ist, d.h. der Punkt p wird unterdrückt.
Hinweis: Erinnern Sie sich ggf. auch an Aufgabe 26c.

b) Zeigen Sie nun, dass die Matrixdarstellung $J_F(p)$ von d_pF bzgl. $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V$ durch

$$(J_F(p))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)$$

gegeben ist. Dies ist die sogenannte Jacobi-Matrix.

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen für die Funktion $F, G, G \circ F$ aus Aufgabe 28. Überzeugen Sie sich durch eine Rechnung, dass sich die Kettenregel hier in das Produkt der Jacobi-Matrizen übersetzt:

$$J_{G\circ F}(p) = J_G(F(p)) \cdot J_F(p).$$

34. Die ominöse “Ableitung nach der Zeit”

In der Vorlesung über Experimentalphysik ist sie Ihnen sicherlich bereits über den Weg gelaufen: Ist $F : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so findet man häufig Ausdrücke wie

$$„\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i“.$$

Gemeint ist damit Folgendes: Natürlich werden nicht die Koordinaten selbst nach der Zeit differenziert, sondern man betrachtet zusätzlich eine differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to X,\ t \mapsto \gamma(t)$. $F \circ \gamma$ bildet dann von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ab und kann nach seiner (einzigen!) Variable t differenziert werden. Zeigen Sie also (z.B. mit Hilfe von 33c)

$$\frac{d(F \circ \gamma)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

35. Kugelkoordinaten

a) Im euklidischen Raum $\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten x_i und Ursprung p_0 werden Kugelkoordinaten durch

$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi \qquad x_2 = r\sin\theta\sin\phi \qquad x_3 = r\cos\theta$$

erklärt. Erläutern Sie unter Verwendung einer Zeichnung die Bedeutung von r, θ, ϕ und der Transformationsvorschrift.

b) Berechnen Sie die Basisvektorfelder $\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi$ und zeigen Sie, dass diese in jedem Punkt paarweise orthogonal sind. Berechnen Sie zusätzlich die Norm dieser Vektorfelder. Hinweis: Wenn man einen Punkt $p = p_0 + \sum_i x_i\mathbf{e}_i$ mittels obiger Vorschrift als Funktion seiner Kugelkoordinaten auffasst, d.h.

$$p = p_0 + r\sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_2 + r\cos\theta\mathbf{e}_3,$$

so erhält man das i. Basisvektorfeld durch partielles Differenzieren nach der entsprechenden Koordinate, etwa $\partial_r = \frac{\partial p}{\partial r}$.

36. Flächenintegrale

In $\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten seien drei Flächenparametrisierungen gegeben:

$$\begin{aligned}
\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{E}_3 \\
\sigma_1 : (s,t) &\mapsto p_0 + s\,\cos(2\pi t)\,\mathbf{e}_x + s\,\sin(2\pi t)\,\mathbf{e}_y \\
\sigma_2 : (s,t) &\mapsto p_0 + (2s-1)\,\mathbf{e}_x + (4t-2)\sqrt{s(1-s)}\,\mathbf{e}_y \\
\sigma_3 : (s,t) &\mapsto p_0 + s\mathbf{e}_x + t\mathbf{e}_y + (s(1-s) + t(1-t))\,\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial s}\sigma_i(s,t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_i(s,t)$ für die drei Parametrisierungen.

Weiterhin seien die zwei 2-Formen $\alpha_1 = dx \wedge dy$ und $\alpha_2 = z\,dx \wedge dy$ gegeben.

b) Berechnen Sie $\int_{\sigma_1} \alpha_1$, $\int_{\sigma_2} \alpha_1$, $\int_{\sigma_3} \alpha_1$ und $\int_{\sigma_3} \alpha_2$.
Erinnerung: Berechnen Sie dazu jeweils $(\alpha_j)_{\sigma_i(s,t)}$, $(\alpha_j)_{\sigma_i(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s}\sigma_i(s,t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma_i(s,t)\right)$ und

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (\alpha_j)_{\sigma_i(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s}\sigma_i(s,t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma_i(s,t) \right) dt \right) ds$$

Hinweis: Für $\int_{\sigma_2} \alpha_1$ ist die Substitution $s = (1 - \cos(u))/2$ nützlich.