Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 9

WS 2014/15

Abgabe: 09.12.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 11.12.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

37. Parametrisierung von Flächen

Geben Sie Parametrisierungen der folgenden Flächen in $\mathbb{E}_3$ an:

a) Rechteck mit Länge A, Breite B.

b) Zylindermantel mit Radius R und Höhe H.

c) Kugeloberfläche mit Radius R.

Orientierung und Position der Flächen bleibt Ihnen überlassen. Denken Sie daran, dass auch Definitions- und Wertebereiche zu einer Abbildung gehören!

38. Rechnen mit Formen

Wie üblich sei $\mathbb{E}_3$ der affine dreidimensionale Raum mit Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Es seien f, g und h Funktionen von $\mathbb{E}_3$ nach $\mathbb{R}$. Aus der Vorlesung wissen Sie wie man mittels der äußeren Ableitung 'd' 1-Formen ableitet:

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx\ .$$

Beispiel: $d(yx^2\,dy + y\,dx) = (2xy - 1)dx \wedge dy$
Sie sollten versuchen, möglichst viele der Aufgaben ohne lange Rechnungen zu lösen. Die Lösung des Beispiels kann man z.B. ohne großes Nachdenken hinschreiben, da man $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ sowie „$d^2 = 0$“ kennt, also im ersten Summanden nur nach x partiell ableiten muss: $d(yx^2 dy) = 2xydx \wedge dy$. Beim zweiten Summanden ist es sogar noch einfacher, $d(ydx) = dy \wedge dx = -dx \wedge dy$.

a) Berechnen Sie $d(x\,dy + y\,dx)$, $d\big(z\,\sin(x)\,dx\big)$, $d\big(\sin(x)\,dy + \ln(y)dx\big)$ und $d\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right)$.

b) Werten Sie die folgenden Ausdrücke aus ($s, t, r \in \mathbb{R}$):

$$(dx \wedge dy)_{p_0 + t\mathbf{e}_x}(s\mathbf{e}_x, r\mathbf{e}_y)\ , \quad \big((x^2+y^2)dx \wedge dy\big)_{p_0 + t\mathbf{e}_x + r\mathbf{e}_y}(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x)\ ,$$
$$\big((dx + dy) \wedge (dy - ydx)\big)_{p_0 + s\mathbf{e}_y}(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\ , \quad (dx \wedge e^z dz)_{p_0}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$$

c) Nun betrachten wir die 1-Form $\alpha := x^2ydy + y^2xdx$. Berechnen Sie erst das Differential $D\alpha$ und dann auch noch $d\alpha$. Was ist der Unterschied zwischen D und d?
Hinweis: Um das Differential D zu berechnen müssen Sie hier noch einmal die Definition zurate ziehen. α ist eine Abbildung $\mathbb{E}_2 \to V^*$, die jedem Punkt p die Linearform α_p zuordnet. Sie müssen also $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\alpha_{p+t(v_xe_x+v_ye_y)}$ berechnen und mit $d\alpha$ vergleichen.

39. Flächenintegrale und Satz von Stokes

In Aufgabe 36 wurden schon 2-Formen ω über Flächen σ integriert. Falls eine 1-Form α existiert, so dass $\omega = d\alpha$ gilt, ist der Satz von Stokes anwendbar:

$$\int_\sigma d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha \, .$$

Hierbei bezeichnet $\partial\sigma$ den Rand von σ.

a) Geben Sie eine Parametrisierung σ einer Kreisscheibe in der $x - y$ Ebene mit Radius R und eine Parametrisierung $\partial\sigma$ ihres Randes an. Machen Sie eine Skizze und zeichnen Sie die Orientierung der Fläche und die des Randes ein. Rechnen Sie explizit (also ohne Stokesschen Satz) nach, dass $\int_\sigma d(xdy) = \int_{\partial\sigma} xdy$ gilt.

b) Skizzieren Sie die von $\sigma : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{E}_3, (s,t) \mapsto p_0 + 3(\sin(2\pi t)\mathbf{e}_x + \cos(2\pi t)\mathbf{e}_y) + s\mathbf{e}_z$ parametrisierte Fläche und ihren Rand. Zeichnen Sie auch die jeweiligen Orientierungen ein. Zeigen Sie explizit, dass $\int_\sigma d(e^z xdy) = \int_{\partial\sigma} e^z xdy$ gilt.
Hinweis: $\partial\sigma$ besteht aus zwei Teilen, über die jeweils integriert werden muss. Vorsicht bei den Vorzeichen!

40. Flächenintegral eines Vektorfelds

Wir betrachten das Rotationsparaboloid $\Sigma = \{(x,y,z)|z = x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dieses entsteht, wie der Name schon vermuten lässt, durch Rotation der Kurve $\gamma(t) = (t, 0, t^2),\ t \in [-1, 1]$ um die z-Achse.

a) Geben Sie eine Parametrisierung für Σ an, sodass der Normalenvektor "nach oben" weist. Beachten Sie, dass die Symmetrie die Verwendung von Zylinderkoordinaten nahelegt.

b) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds $V(x,y,z) = (y^2, x, z^2)$ und integrieren Sie diese über Σ.

Hinweis: Diese Aufgabe ist mit Absicht in der etwas nachlässigen Sprache der klassischen Vektoranalysis verfasst - Sie müssen auch lernen, diese in unseren präziseren Umgangston zu übersetzen.

41. Umlaufzahl

Diese Aufgabe ist etwas schwieriger als die üblichen Übungsaufgaben und kann daher freiwillig bearbeitet werden.
Wir arbeiten in einem zweidimensionalen affinen Raum mit affinen Koordinaten $(p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Zeigen Sie, dass das Wegintegral $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ angibt, wie häufig ein stetig differenzierbarer Weg γ den Ursprung p_0 umläuft.
Tipp: Schreiben Sie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}_2; t \mapsto p_0 + r(t)(\cos\phi(t)\mathbf{e}_x + \sin\phi(t)\mathbf{e}_y)$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $r(t), \phi(t)$.