Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 10

WS 2014/15

Abgabe: 16.12.2014 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 18.12.2014 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/mm1415

42. Volumenparametrisierung

Geben Sie Parametrisierungen der folgenden Volumina in $\mathbb{E}_3$ an:
a) Ein Quader mit Kantenlängen A, B und C.

b) Einen Zylinder mit Radius R und Höhe H.

c) Eine Halbkugel mit Radius R.

d) *freiwillig, da kniffliger*: Ein Volltorus (Donut) mit Dicke D und Radius des Lochs R.

Wie schon bei den Flächen bleiben Orientierung und Position Ihnen überlassen.

43. 3-Formen

Wie üblich sei $\mathbb{E}_3$ der affine dreidimensionale Raum mit Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Es seien f, g und h Funktionen von $\mathbb{E}_3$ nach $\mathbb{R}$. Aus der Vorlesung wissen Sie, wie man die äussere Ableitung von 2-Formen berechnet:

$$d(f\,dx \wedge dy + g\,dy \wedge dz + h\,dz \wedge dx) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) dx \wedge dy \wedge dz\ .$$

Beispiel: $d(xyz\,dx \wedge dz) = -d(xyz\,dz \wedge dx) = -xz\,dx \wedge dy \wedge dz$.
a) Berechnen Sie $d\big(z^2 \tan(x) dz \wedge dy\big)$ und $d\left(\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx \wedge dy\right)$.

Im Folgenden bezeichnen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Vektoren. Die Auswertung von 3-Formen lässt sich mit Hilfe von

$$(f\,dx \wedge dy \wedge dz)_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(p)\Big[\vartheta_x(\mathbf{u})(\vartheta_y \wedge \vartheta_z)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \vartheta_x(\mathbf{v})\,(\vartheta_y \wedge \vartheta_z)(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \vartheta_x(\mathbf{w})(\vartheta_y \wedge \vartheta_z)(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big]$$

auf die Auswertung von 2-Formen zurückführen.
b) Berechnen Sie $(dx \wedge dy \wedge dz)_p(r\mathbf{e}_x, s\mathbf{e}_y, t\mathbf{e}_z)$ und $(x^2 dx \wedge dy \wedge dz)_{p_0 + t\mathbf{e}_x}(2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$.

44. Volumenintegrale

Analog zu Flächenintegralen über 2-Formen wurden in der Vorlesung Volumenintegrale über 3-Formen definiert.

$$\int_\sigma \omega = \int_0^1 dr \int_0^1 ds \int_0^1 dt\ \omega_{\sigma(r,s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma(r,s,t), \frac{\partial}{\partial s}\sigma(r,s,t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma(r,s,t) \right) .$$

a) Skizzieren Sie das von $\sigma : [0,1]^3 \to \mathbb{E}_3, (r,s,t) \mapsto p_0 + r\mathbf{e}_x + s\mathbf{e}_y + t\mathbf{e}_z$ parametrisierte Volumen und berechnen Sie $\int_\sigma dx \wedge dy \wedge dz$.

b) Skizzieren Sie das von $\sigma : [0,1]^3 \to \mathbb{E}_3, (r,s,t) \mapsto p_0 + 3r(\sin(2\pi t)\mathbf{e}_x + \cos(2\pi t)\mathbf{e}_y) + s\mathbf{e}_z$ parametrisierte Volumen und berechnen Sie $\int_\sigma \frac{ze^{-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx \wedge dy \wedge dz$.

45. Satz von Stokes, klassisch

Verwenden Sie den Satz von Stokes, um das Ergebnis von Aufgabe 40 mit Hilfe eines Kurvenintegrals zur reproduzieren.