Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

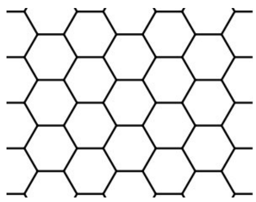
Blatt 11

WS 2014/15

Abgabe: Aufgrund der vorlesungsfreien Zeit am **Mittwoch**, 07.01.2015 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 08.01.2015 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

46. Visualisierung des Formenkalküls in zwei Dimensionen

Ein zweidimensionales Honigwabengitter K ist eine Parkettierung[1] der Ebene mit gleichseitigen Sechsecken sowie deren Kanten und Ecken:



Diese erzeugen als Basiselemente die entsprechenden Vektorräume der k-Ketten $C_k(K)$ $(k = 2, 1, 0)$.

a) Beschreiben Sie die Randoperatoren $\partial : C_2(K) \to C_1(K)$ und $\partial : C_1(K) \to C_0(K)$ und zeigen Sie, dass "der Rand des Randes verschwindet", d.h. dass $\partial \circ \partial = 0$ gilt.

b) Das zum Honigwabengitter K duale Gitter $\tilde{K}$ ist ein Dreiecksgitter. Fertigen Sie eine Skizze an und diskutieren Sie die Schnittpaarung, d.h. die diskrete Version des Integrals

$$\int : C^k(\tilde{K}) \times C_k(K) \to \mathbb{R}.$$

c) Bestimmen Sie die Differenzialoperatoren $d : C^0(\tilde{K}) \to C^1(\tilde{K})$ und $d : C^1(\tilde{K}) \to C^2(\tilde{K})$ aus der Forderung, dass der allgemeine Satz von Stokes $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ gelten soll. Folgern Sie die Regel, dass "zweimal d Null ist", d.h. $d \circ d = 0$.

Hinweis: Lineare Abbildungen (wie $d, \partial, \int$) sind durch die Angabe ihrer Wirkung auf einer Basis vollständig charakterisiert. Sie müssen also im ersten Teil angeben, wie ∂ auf ein orientiertes Sechseck bzw. auf eine gerichtete Kante wirkt.

[1] Eine Parkettierung ist eine lückenlose Überdeckung der euklidischen Ebene mit gleichförmigen Teilflächen, die sich gegenseitig nicht überlappen.

47. Nabla: Gradient, Divergenz und Rotation

In dieser Aufgabe arbeiten wir wieder im affinen Raum $\mathbb{E}_3$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und rechtshändiger kartesischer Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}\}$. Es ist nützlich, die partiellen Ableitungen in einen Vektor zu schreiben: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Man nennt dieses Objekt “Nabla”. Die folgenden drei Operationen kann man mit Nabla durchführen:

$$\nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad , \quad \nabla \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} := \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{und} \quad \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

wobei f, g und h Funktionen von $\mathbb{E}_3$ nach $\mathbb{R}$ sind.

a) Sei nun $f = zx^2 + e^{-y^2}$ Berechnen Sie ∇f und $\nabla \cdot (\nabla f)$.

b) Wenden Sie $\nabla\times$ auf die folgenden Vektorfelder an:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad , \quad \begin{pmatrix} z^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \\ -z^2 - x^2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ \sin(x^2 z^2) \\ \exp(-z^2) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

c) Berechnen Sie die Rotation des zweiten Vektorfelds aus Aufgabenteil b) mittels der Definition der Rotation aus der Vorlesung: $\text{rot} = I_2 \circ d \circ I_1^{-1}$.

48. Satz von Gauß

Wir arbeiten in dieser Aufgabe in $\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten.

a) Geben Sie die Parametrisierung einer rechtshändig orientierten Vollkugel B vom Radius 5 um den Ursprung an und bestimmen Sie eine Parametrisierung des Randes ∂B mit entsprechender Orientierung.

b) Berechnen Sie für $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ die Integrale $\int_{\partial B} \alpha$ und $\int_B d\alpha$.

49. Induktionsgesetz

a) Die folgende Fläche hängt von einem Parameter t ab:

$$\sigma_t : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}_3,$$
$$(r,s) \mapsto p_0 + r\cos(2\pi s)\mathbf{e}_x + r\sin(2\pi s)\Big[\cos(t)\mathbf{e}_y + \sin(t)\mathbf{e}_z\Big] .$$

Skizzieren Sie σ_0 und $\sigma_{\pi/2}$. Wie verändert sich die Fläche in Abhängigkeit von t?

b) Berechnen Sie $-\frac{d}{dt}\int_{\sigma_t} B$, wobei $B = b_z dx \wedge dy$ (mit $b_z \in \mathbb{R}$).

c) Wenn Ihnen das Induktionsgesetz bereits aus der Schule bekannt ist: Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. Was ist $\partial\sigma$?

50. Wiederholung I: Matrixdarstellung

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Eine lineare Abbildung A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A : V &\to V \\ \mathbf{v} &\mapsto \big(\vartheta_1(\mathbf{v}) - \vartheta_2(\mathbf{v})\big)\mathbf{v}_1 + \vartheta_1(\mathbf{v})\mathbf{v}_2 + \vartheta_3(\mathbf{v})\mathbf{v}_3 \ , \end{aligned}$$

wobei $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis ist. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von A. Berechnen Sie zusätzlich die Matrixdarstellung von A^t explizit mit der Definition der transponierten Abbildung.

51. Wiederholung II: Differenzial

Im Folgenden arbeiten wir in einem zweidimensionalen affinen Raum X mit Differenzvektorraum V und Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (mit Koordinatenfunktionen x_1 und x_2). In dieser Aufgabe bezeichnen f, h_1 und h_2 Funktionen von X in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Hinweis/Erinnerung:

- Partielle Ableitungen: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := D_p f(\mathbf{e}_i) = \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{e}_i)|_{t=0}$.

- Differential: $Df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$,
  wobei $(dx_i)_p = \vartheta_i$. Hier bezeichnet $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ die Dualbasis von $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

a) Berechnen Sie jeweils das Differenzial ($a \in \mathbb{R}$):
$f = ax_1$, $f = (x_1)^2(x_2)^3$, $f = e^{-x_1 x_2} \sin(x_2)$

Hinweis/Erinnerung:
Das Differenzial einer Abbildung

$$H = p_0 + h_1\,\mathbf{e}_1 + h_2\,\mathbf{e}_2 \qquad \text{(genauer: } H(p) = p_0 + h_1(p)\,\mathbf{e}_1 + h_2(p)\,\mathbf{e}_2\text{)}$$

von X nach X lässt sich wie folgt schreiben:

$$DH = \mathbf{e}_1 Dh_1 + \mathbf{e}_2 Dh_2 \ .$$

b) Berechnen Sie nun unter Verwendung der obigen Darstellung das Differenzial DH der folgenden Abbildungen ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$H = p_0 + a\,x_1\,\mathbf{e}_1 + b\,x_2\,\mathbf{e}_2 \ , \quad H = p_0 + a\,x_2\,\mathbf{e}_1 + b\,x_1\,\mathbf{e}_2 \ ,$$
$$H = p_0 + x_1 \cdot (\cos(x_2)\mathbf{e}_1 + \sin(x_2)\,\mathbf{e}_2) \ .$$

c) Das Differenzial DH ausgewertet an einem Punkt p ist eine lineare Abbildung. Geben sie jeweils die Matrixdarstellung (d.h. die Jacobi-Matrix) von D_pH zu den Funktionen H aus dem vorherigen Aufgabenteil an.