Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 12

WS 2014/15

Abgabe: 13.01.2015 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 15.01.2015 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

52. Trägheitsmoment einer Kugel

Wir arbeiten in dieser Aufgabe wieder im $\mathbb{E}_3$ mit Standardkoordinaten.
Mit dem aktuellen Stoff der Vorlesung können wir nun Massendichten angeben und mittels dieser z.B. Gesamtmassen und Trägheitsmomente ausrechnen. Wir betrachten eine inhomogene Kugel K im $\mathbb{E}_3$ mit Radius R und Massendichte

$$\rho = \begin{cases} c(x^2+y^2+z^2)\cdot[dx\wedge dy\wedge dz;\text{rechts}] & \text{wenn } x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c ist dabei eine Konstante der Dimension ML^{-5}.

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kugel an.

b) Berechnen Sie die Gesamtmasse M der Kugel durch Integration von ρ über $[K;\text{rechts}]$.

c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse mittels des Integrals

$$I_{z-\text{Achse}} = \int_{[K;\text{rechts}]} (x^2+y^2)\rho\ .$$

d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit gleichem Radius und gleicher Masse und begründen Sie physikalisch, warum das Ergebnis für die hier diskutierte Kugel kleiner oder größer ist.

53. Fluss durch ein Rohr

Strömt Wasser durch ein Rohr, so nimmt die Strömungsgeschwindigkeit vom Rand zur Mitte hin zu. Wir betrachten einen Schnitt durch ein Rohr vom Radius R senkrecht zur Fließrichtung und wählen ein Koordinatensystem so, dass der Ursprung auf der Symmetrieachse des Rohres liegt. Bezeichnet r den Abstand vom Ursprung und v_0 den Betrag der maximalen Fließgeschwindigkeit, so erhält man den Betrag der Geschwindigkeit in jedem Punkt des Querschnittes innerhalb des Rohres mittels $v(r) = v_0(R-r)^2/R^2$. Berechnen Sie den gesamten Fluss durch dass Rohr, d.h. die pro Zeiteinheit hindurchfließende Wassermenge.

54. Wiederholung: Wegintegrale von Vektorfeldern

a) Ein Satellit umrunde die Erde auf einer kreisförmigen Bahn. Skizzieren Sie das Schwerkraftfeld der Erde ($\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$, $\alpha > 0$, Ursprung im Erdmittelpunkt) in der Bahnebene des Satelliten. Berechnen Sie die Arbeit, die bei einer Umrundung der Erde sowie beim radialen Anheben von Höhe h_1 auf Höhe h_2 verrichtet wird.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{e}_y - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{e}_x\right).$$

Berechnen Sie die Wegintegrale über

1. das im mathematisch positiven Sinne – d.h. gegen den Uhrzeigersinn – durchlaufene Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$.
   Hinweis: Sie können entweder viermal rechnen oder begründen, wieso die Kenntnis des Kurvenintegrals über eine Seite ausreicht.
2. einen im negativen Sinne durchlaufenen Kreis um $(0, 0)$ mit Radius R.

Hinweis: Verwenden Sie zum Lösen von $\int \frac{dx}{1+x^2}$ die Substitution $x = \tan(y)$.

55. Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten

Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}_3; t \mapsto p_0 + r(t)(\cos\phi(t)\sin\theta(t)e_x + \sin\phi(t)\sin\theta(t)e_y + \cos\theta(t)e_z) \equiv p_0 + r(t)\hat{e}_r(t),$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $r, \phi, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man bezeichnet diese Kurve als Bahnkurve eines Punkts in Kugelkoordinaten.

a) Geben Sie die Ableitung $\dot{\gamma}$ an.

b) Transformieren Sie den erhaltenen Ausdruck in die Basis $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$.