Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 13

WS 2014/15

Abgabe: 20.01.2015 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 22.01.2015 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

56. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{array}{rclll} y' + 2y & = & 0 & y(0) = 1 & \\ y'' - 2y' - 15y & = & 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \\ y'' + 2y' + y & = & 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 2 \end{array}$$

Hinweis: Die Anfangsbedingungen dienen dazu, die Konstanten, die in der allgemeinen Lösung auftauchen, zu bestimmen.

57. Getriebener Harmonischer Oszillator

Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte inhomogene Differentialgleichung des getriebenen harmonischen Oszillators

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \; .$$

Für diese Aufgabe setzen wir

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \; .$$

a) Geben Sie mittels der Greenfunktion

$$G(t, t') = \begin{cases} \omega_0^{-1} \sin(\omega_0 t - \omega_0 t') & \text{für } t \geq t' \\ 0 & \text{für } t \leq t' \end{cases}$$

explizit die partikuläre Lösung x_p der inhomogenen Differentialgleichung an.

b) Wir betrachten nun den Fall, dass der Oszillator mit der eingeprägten Frequenz ω_0 angetrieben wird. Berechnen Sie dazu $\lim_{\omega \to \omega_0} x_p(t)$ und bringen Sie das Ergebnis mittels $a \sin \phi + b \cos \phi = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\phi - \arctan \frac{a}{b})$ in die Form $A(t) \cos(\omega_0 t + \psi(t))$. Wie verhalten sich $A(t)$ und $\psi(t)$ asymptotisch, d.h. für sehr große t? Was bedeutet das physikalisch? Wenn Sie richtig gerechnet haben und Ihre Interpretation stimmt wissen Sie auch, warum wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung ignoriert haben.

58. Potenzreihenansatz

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy \qquad y(0) = 1$$

durch einen sog. Potenzreihenansatz: Nehmen Sie an, dass sich die Lösung in eine Potenzreihe entwickeln lässt, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung ein, um einen Wert für a_0 sowie Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten a_k zu gewinnen. Berechnen Sie daraus nun $a_0, a_1, \ldots a_8$, stellen Sie eine Vermutung über eine explizite Darstellung der a_k auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion. Wenn Sie fertig sind und richtig gerechnet haben, können Sie die Lösung durch elementare Funktionen ausdrücken.
Hinweis: Die erforderlichen Techniken kennen Sie aus Ihrer Mathematikvorlesung.

59. Wiederholung: Noch mehr lineare Abbildungen

Die Korrektur von Übungsblatt 11 hat offenbart, dass ein beachtlicher Teil von Ihnen immer noch Schwierigkeiten mit der Bestimmung von Matrixdarstellungen hat. Nutzen Sie die Gelegenheit, um diese zu beheben und bestimmen Sie die Matrixdarstellung folgender Abbildungen (die Notation kennen Sie):

a)

$$B_U = \{u_1, u_2\}, B_V = \{v_1, v_2, v_3\}, B_{U^*} = \{\vartheta_1, \vartheta_2\}$$

$$f : U \to V, f(u) = \vartheta_2(u)v_1 + (5\vartheta_1(u) - 3\vartheta_2(u))v_2 + 3\vartheta_2(u)v_3$$

b)

$$B_V = \{x^4, \ldots, x^1, x^0\}, L : V \to V, L(f) = f'' + 2f'$$

c) V sei der Lösungsraum der linearen Differentialgleichung $\mathcal{L}y = 0$. Wie sieht die Matrixdarstellung von $\mathcal{L}$ bzgl. einer Basis von V aus?