Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 14

WS 2014/15

Abgabe: 27.01.2015 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 29.01.2015 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor/mm1415

Die in Aufgabe 60 geübten Lösungsmethoden sowie die Modellierung realer Prozesse durch Differentialgleichungen in den Aufgaben 61 und 62 sind besonders klausurrelevant.

60. Differentialgleichungen

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen bzw. Variation der Konstanten:

a) $y'(x) = y^2(x) \qquad y(0) = 1$

b) $y' = 2xy(x) + x^3 \qquad y(0) = 3$

c) $y'(x) = x(1 - y(x)^2) \qquad y(0) = \frac{1}{2}$

Erinnerung: $y'(x) + 2y(x) = x$ kann wie folgt gelöst werden. Zunächst betrachtet wir die zugehörige homogene Differentialgleichung $y'(x) + 2y(x) = 0$. Durch Trennung der Variablen erhalten wir $\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$ und damit $\ln|y| = -2x + \tilde{c} \Rightarrow y(x) = ce^{-2x}$. Variation der Konstanten bedeutet nun, $c \in \mathbb{R}$ durch eine reellwertige Funktion $c(x)$ zu ersetzen, um dadurch die inhomogene Differentialgleichung zu lösen. Einsetzen ergibt $c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x} + 2c(x)e^{-2x} = x$ und wir sehen, dass $c(x)$ durch Integration bestimmt werden kann: $c(x) = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher $y(x) = \frac{1}{4}(2x-1) + Ce^{-2x}$.

61. Logistische Differentialgleichung

Die Größe einer Population, der nur ein begrenzter Raum und begrenzte Ressourcen zur Verfügung stehen – etwa der Anzahl von Bakterien auf einem Nährboden in einer Petrischale – werde für $t \geq 0$ durch eine stetig differenzierbare Funktion P beschreiben.

a) Begründen Sie, warum
$$P'(t) = kP(t)(P_\infty - P(t))$$
mit $k, P_\infty \in \mathbb{R}^+$ ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Population darstellt.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für eine Anfangspopulation $P(0) = P_0 \in \mathbb{R}^+, P_0 \leq P_\infty$ und skizzieren Sie qualitativ den Graph den Lösungsfunktion.

62. Freier Fall mit Newton'scher Reibung

Betrachten Sie den freien Fall eines Teilchens der Masse m im homogenen Schwerefeld (Fallbeschleunigung g, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0.$). Auf das Teilchen wirke die quadratisch von der Momentangeschwindigkeit v abhängende Reibungskraft vom Betrag kv^2.

a) Stellen Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung für diese Situation auf. Beachten Sie dabei, dass es sich hierbei um ein effektiv eindimensionales Problem handelt.

b) Finden Sie durch ein physikalisches Argument die Geschwindigkeit $v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t)$.

c) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichung und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit.

63. Wiederholung: Skalarprodukte

Mit $C^0([a,b])$ wird der Vektorraum der auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetigen Funktionen bezeichnet. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^0([a,b]) \times C^0([a,b]) \to \mathbb{R} \qquad (f,g) \mapsto \langle f,g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Hinweis: Um Positivdefinitheit nachzuweisen müssen Sie zeigen, dass aus $f \neq 0$ stets $\langle f,f \rangle > 0$ folgt. Nehmen Sie an, dass $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$ gilt und verwenden Sie, dass f dann auf einer ganzen δ-Umgebung von x_0 nicht verschwindet.