Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Daniel Wieczorek

Mathematische Methoden der Physik

Blatt 15

WS 2014/15

Abgabe: 02.02.2015 bis 12 Uhr im entsprechenden Briefkasten
Besprechung: 04.02.2015 in den Übungsgruppen
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor/mm1415

Die Aufgaben 66 und 67 sind besonders klausurrelevant.

64. Isentrope Zustandsänderung eines idealen Gases

Die Gleichgewichtszustände eines idealen Gases können durch Angabe von Druck[1] P, Volumen V und Temperatur T beschrieben werden, jedoch sind zur eindeutigen Angabe eines Zustands nur zwei Variablen nötig, da die dritte sich stets aus der idealen Gasgleichung

$$PV = nRT$$

ergibt. Hierbei ist n ist die Stoffmenge und R die universelle Gaskonstante. Die Gleichgewichtszustände lassen sich also als Punkte auf einer „Fläche“ M auffassen – die Anführungsstriche deuten dabei an, dass es sich um ein Objekt handelt, das man wie eine herkömmliche Fläche durch zwei Koordinaten beschreiben kann, es jedoch keinen umgebenden Raum gibt. Druck P, Volumen V, Temperatur T, Entropie S und innere Energie U lassen sich als Koordinatenfunktionen $M \to \mathbb{R}$ auffassen. Die Gasgleichung bedeutet in diesem Zusammenhang, dass für alle $p \in M$ die Gleichung $P(p)V(p) = nRT(p)$ gilt. Für ein ideales Gas haben Arbeitsform und das Differential der inneren Energie die Gestalt

$$W = -PdV \qquad dU = C_V dT,$$

wobei C_V die isochore Wärmekapazität bezeichnet. Wir wollen in dieser Aufgabe die Gleichung für Kurven konstanter Entropie, die sog. *Isentropen*[2], herleiten.

a) Der aus der Vorlesung bekannte 1. Hauptsatz der Thermodynamik lautet $Q + W = dU$. Isentropen γ sind dadurch definiert, dass längs dieser Kurven die Wärmeform Q verschwindet, d.h. dass $Q_\gamma(\gamma') = 0$ gilt. Wählen Sie die Koordinaten T, V zu zeigen Sie, dass auf diese Weise

$$T(\gamma(t))V(\gamma(t))^{\frac{nR}{C_V}} = \text{konstant}$$

folgt. Man schreibt dafür oft kurz $TV^{\frac{nR}{C_V}} = \text{konstant}$.
Hinweis: Sie dürfen dazu verwenden, dass man $\gamma' = T'\partial_T + V'\partial_V$ schreiben kann, wobei $T' \equiv \frac{d}{dt}T(\gamma(t))$, $V' \equiv \frac{d}{dt}V(\gamma(t))$.

b) Geben Sie die Isentropengleichung für die Koordinatenwahlen P, V und P, T an.

[1] Wir verwenden hier den Großbuchstaben, um die übliche Schreibweise p für Punkte nicht umstoßen zu müssen.
[2] Die man mitunter etwas unpräzise auch als Adiabten bezeichnet.

65. Isotherme Expansion eines van-der-Waals-Gases

Die Zustandsgleichung eines van-der-Waals-Gases[3] lautet

$$nRT = \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb),$$

wobei a der sog. Kohäsionsdruck und b das sog. Kovolumen ist. Berechnen Sie den Wärmeaustausch mit der Umgebung, der bei einer isothermen Expansion $(V_1, T_1) \to (V_2, T_1)$ stattfindet. Auch hier ist $dU = C_V dT$.

66. Mathematisches Schwerependel

Das mathematische Schwerependel besteht aus einer Punktmasse m, die an einem (masselosen) Faden der Länge l aufgehängt ist und Reibungsfrei schwingen kann.

a) Der vom Lot aus gemessene Ausschlagwinkel des Pendels sei mit φ bezeichnet. Stellen Sie die (nicht genäherte) Bewegungsgleichung des Pendels auf.
Hinweis: Die Lösung hat die Form $\varphi''(t) = \text{const} \cdot \sin(\varphi(t))$, wenn t die Zeit bezeichnet.

b) Nun gehen wir davon aus, dass das Pendel stets nur kleine Ausschläge macht. Verwenden Sie diese Annahme, um mittels Taylorentwicklung aus der Gleichung in Teil **a)** eine lineare Differentialgleichung herzuleiten („Linearisierung“). Lösen Sie diese. Verwenden Sie als Anfangsbedingungen den Ausschlagswinkel α und die Winkelgeschwindigkeit ω.

67. Transformationssatz

Im Folgenden arbeiten wir im $\mathbb{E}_3$ mit Koordinatensystem $\{p_0; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$.

a) Berechnen Sie das Differential der Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{E}_3 &\to \mathbb{E}_3 \\ p &\mapsto p_0 + ax(p)\mathbf{e}_x + by(p)\mathbf{e}_y + cz(p)\mathbf{e}_z \text{ , mit } a, b, c \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie $\psi^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

c) Σ bezeichne die Kugel mit Radius eins um p_0. Machen Sie sich klar, dass $\psi(\Sigma)$ ein Ellipsoid ist. Das Volumen des Ellipsoids ist dann durch

$$\int_{\psi(\Sigma)} dx \wedge dy \wedge dz$$

gegeben. Verwenden Sie den Transformationssatz

$$\int_{\psi(\Sigma)} \omega = \int_{\Sigma} \psi^*(\omega)$$

und Aufgabenteil **b)**, um die Integration über $\psi(\Sigma)$ auf eine Integration über Σ zurückzuführen und geben Sie das Volumen des Ellipsoids an.
Hinweis: Sie müssen das Integral nicht explizit ausrechnen. Verwenden Sie, dass das Volumen der Einheitskugel durch $4\pi/3$ gegeben ist.

[3] Diese Gleichung beschreibt ein reales Gas, dessen Moleküle nicht punktförmig sind und Wechselwirkungen unterliegen, die über elastische Stöße hinausgehen.