Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik

21. November 2002
Abgabe 26.11.02

6. Übung zur Theoretischen Physik III WS 2002/03

Teilklausuren 6.12.2002, 14.2.2003, jeweils 14 Uhr s.t.

---

12. Van Vleck Formel

12 Punkte

Der van Vleck Propagator

$$K_{\rm cl} = \sum_{\chi_{\rm cl}} \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(q_i, q_f; T)}$$

wird bestimmt durch das Hamiltonsche Wirkungsfunktional,

$$S = \int_\chi (p dq - H dt),$$

ausgewertet auf klassischen Pfaden $\chi_{\rm cl} : t \to (q(t), p(t), t)$ im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ zu den Randbedingungen $q(0) = q_i$ und $q(T) = q_f$.

Berechnen Sie den van Vleck Propagator für die Fälle:

a) freie Bewegung
b) harmonischer Oszillator.

Ergibt sich Übereinstimmung mit den bekannten exakten Ergebnissen für den Propagator?

---

a) Mit $H = \frac{p^2}{2m}$ ist

$$\chi_{\rm cl} : t \to \left(q_i \left(1 - \frac{t}{T}\right) + q_f \frac{t}{T},\ m \frac{q_f - q_i}{T}; t \right)$$

die eindeutige Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen. Die Wirkung ist

$$S = \int_\chi (p dq - H dt) = T \cdot \left(m \frac{q_f - q_i}{T} \frac{q_f - q_i}{T} - \frac{1}{2m} \left(m \frac{q_f - q_i}{T} \right)^2 \right) = \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{T}.$$

Damit ist

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f} = -\frac{m}{T} \qquad \text{und} \qquad K_{\rm cl} = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q_f - q_i)^2}{T}}.$$

b) Die Lösung der klassichen Bewegungsgleichungen für vorgegebenen Anfangsort q_0 und Anfangsimpuls p_0 ist

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) \qquad (*)$$
$$p(t) = -m\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^T p(t)\dot{q}(t)dt &= \frac{1}{m}\int_0^T \big(p_0\cos(\omega t) - m\omega q_0\sin(\omega t)\big)^2 dt \\
&= \frac{1}{m}\int_0^T \big(p_0^2\cos^2(\omega t) + (m\omega q_0)^2\sin^2(\omega t) - 2m\omega p_0 q_0 \sin(\omega t) cos(\omega t)\big)dt
\end{aligned}$$

und mit $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ weiter

$$\begin{aligned}
\int_0^T (p(t)\dot{q}(t) - H)dt &= \frac{1}{m}\int_0^T \Big(\frac{p_0^2}{2}\cos(2\omega t) - \frac{(m\omega q_0)^2}{2}\cos(2\omega t) - m\omega p_0 q_0 \sin(2\omega t)\Big)dt \\
&= \frac{p_0^2 - (m\omega q_0)^2}{4m\omega}\sin(2\omega t) - \frac{p_0 q_0}{2}\big(1 - \cos(2\omega t)\big).
\end{aligned}$$

Substituieren wir mit Hilfe der Lösung (*) der Bewegungsgleichungen den Anfangsimpuls durch Anfangs– und Endwert der Ortsvariablen,

$$p_0 = m\omega\frac{q_1 - q_0\cos(\omega T)}{\sin(\omega T)},$$

so erhalten wir

$$\int_0^T (p(t)\dot{q}(t) - H)dt = S(q_0, q_1; T) = m\omega\Big(\frac{q_0^2 + q_1^2}{2}\frac{\cos(\omega T)}{\sin(\omega T)} - q_0 q_1 \frac{1}{\sin(\omega T)}\Big)$$

und damit das exakte Ergebnis

$$-\frac{\partial^2 S}{\partial q_0 \partial q_1} = \frac{m\omega}{\sin(\omega T)} \qquad \text{und} \quad K_{\mathrm{cl}} = \Big(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega T)}\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S(q_0,q_1;T)}.$$

■

13. Interferenz

12 Punkte

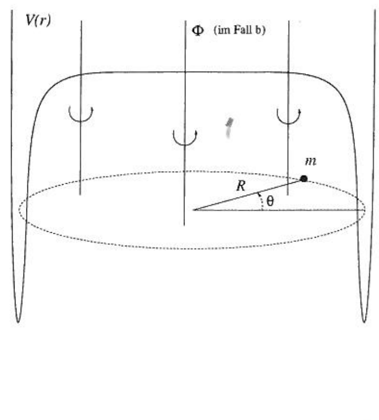
Wir betrachten die zweidimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einer tiefen, schmalen Potentialrinne, welche die Bewegung auf eine Kreisbahn mit festem Radius R einschränkt. Das System wird klassisch durch eine Winkelkoordinate Θ und den konjugierten (Dreh–)Impuls p_Θ beschrieben. Die Hamiltonfunktion ist $H = \frac{1}{2mR^2}p_\Theta^2$ und es ist $p_\Theta = mR^2\dot{\Theta}$.

a)

Wir denken uns das Teilchen zur Zeit $t = 0$ in einem Ortseigenzustand

$$\psi(\Theta) = \delta(\Theta - \Theta_0)$$

präpariert. Wie lautet die Wellenfunktion $\psi(\Theta, t)$ zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$?



22) Rückkehrwahrscheinlichkeit

a) Zu A existiert eine orthogonale Matrix O mit $O^T A O = D$, wobei $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und λ_i die Eigenwerte von A sind. Wir wechseln daher die Integrationsvariable $x \to Ox$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T A x\right) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T D x\right) d^n x$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_i x_i^2\right) dx_i = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

b) Durch die Substitution $x \to A^{-1} j + x$ ergibt sich im Exponenten:

$$-\frac{1}{2} x^T A x + j^T x \to -\frac{1}{2}\left(x^T + j^T A^{-1}\right) A \left(x + A^{-1} j\right) + j^T x + j^T A^{-1} j$$

$$= -\frac{1}{2} x^T A x - j^T x - \frac{1}{2} j^T A^{-1} j + j^T x + j^T A^{-1} j$$

$$= -\frac{1}{2} x^T A x + \frac{1}{2} j^T A^{-1} j$$

(Hierbei wurden $(A^{-1} j)^T = j^T A^{-1}$ für symmetrische A und $j^T x = x^T j$ ausgenutzt)

d) Die Variation eines Funktionals ist definiert durch

$$\int \frac{\delta F[y]}{\delta y(x')} \phi(x')\, dx' = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} F[y + \epsilon \phi].$$

Die erste Variation liefert bekanntermaßen die Euler-Lagrange-Gleichungen. Betrachten wir also mit $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left[-m\left(\ddot{q} + \epsilon \ddot{\phi}\right) - V'(q + \epsilon \phi)\right]$$

$$= -m \ddot{\phi} - V''(q) \phi = \int \left[-m \partial_{t''}^2 - V''(q(t''))\right] \phi(t'')\, \delta(t' - t'')\, dt''$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 S}{\delta(q(t''))\, \delta q(t')} = \delta(t' - t'') \left(-m \partial_{t'}^2 - V''(q(t'))\right).$$

c) Vergleich mit b)

$$e^{-\frac{1}{2}x^T A x + j^T x} \longleftrightarrow e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt' \left(\frac{p^2}{2m} - p\dot{q}\right)}$$

$$A \longleftrightarrow \frac{i}{\hbar m}\mathbb{1}$$

$$j^T \longleftrightarrow \frac{i}{\hbar}\dot{q}$$

$$\rightsquigarrow \int \mathcal{D}p \, \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{p^2}{2m} - p\dot{q}\right)dt\right] \propto e^{\frac{1}{2}\int dt \left(\frac{i}{\hbar}\dot{q}\right)\left(\frac{\hbar m}{i}\mathbb{1}^{-1}\right)\left(\frac{i}{\hbar}\dot{q}\right)}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\int dt \frac{m}{2}\dot{q}^2}$$

e) Es ist $S[q_{cl}] = 0 \Rightarrow e^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}]} = 1$.

f) Der nächste geschenkte Punkt.

g) Wir müssen $-\frac{m}{2}\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) r(t) = \lambda r(t)$, $r(0) = r(t) = 0$ lösen.

$$\Rightarrow r''(t) + \underbrace{\left(\omega^2 + \frac{2\lambda}{m}\right)}_{=: k^2} r(t) = 0$$

Lösung $r(t) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

$r(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$r(t) = 0 \Rightarrow kt = n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{n\pi}{t}\right)^2 - \omega^2\right]$$

h) Dies ist der Fall $\omega = 0$.

i) $$K(0,0;t) = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{\omega t}{n\pi}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{\frac{1}{2}}\theta(t)$$

$$= \left(\frac{\omega t}{\sin\omega t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{\frac{1}{2}}\theta(t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega t)}}\,\theta(t)$$