Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 10

SS 2013

Abgabe: Bis **Mittwoch**, den 26.06.2013, **12 Uhr** im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 28.06.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor
Achtung: Aufgrund einer Tagung finden am 21.06. nur die Gruppen von Charles Guggenheim und Jonathan Lux statt, die von allen Teilnehmern der entsprechenden Uhrzeit besucht werden können.

31. Bloch-Theorem *(4 Punkte)*

Eine für die Festkörperphysik überaus wichtige Folge der diskreten Translationssymmetrie eines idealen Festkörpers ist das Bloch-Theorem. Zeigen Sie: Besitzt das Potential die Eigenschaft $V(\vec{r}+\vec{R}) = V(\vec{r})$ mit $\vec{R} = n_1\vec{a_1} + n_2\vec{a_2} + n_3\vec{a_3},\ n_i \in \mathbb{N}$, so haben alle stationären Zustände des Systems die Form $\Psi(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})u_k(\vec{r})$ mit $u(\vec{r}+\vec{R}) = u(\vec{r})$.

32. Tight-Binding-Modell *(1+1+2+4+2=10 Punkte)*

Wir betrachten ein sehr einfaches eindimensionales Modell der Festkörperphysik, das sog. Tight-Binding-Modell. Dazu stellen wir uns eine Kette äquidistant angeordneter, mehrfach positiv geladener Ionen im Abstand a vor und bringen ein Elektron in dieses System. Es kann durch den Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ mit einem $a-$periodischen Potential V beschrieben werden. $T(l)$ bezeichne den Translationsoperator um den Abstand l, der die Eigenschaften $T(l)^\dagger x T(l) = x + l$, $T(l)\left|x\right\rangle = \left|x+l\right\rangle$ hat.
Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst den Fall, dass das Elektron an ein Ion gebunden werden kann, was unendlich hohen Potentialwänden zwischen den Ionen entspricht. In diesem Fall ist es plausibel anzunehmen, dass die (orthonormalen) Zustände[1] $|j\rangle$, bei denen das Elektron vollständig am Gitterplatz bei $j \cdot a$ lokalisiert ist, Eigenzustände von H mit der Energie E_0 sind.

a) Begründen Sie, dass der Hamiltonoperator für den Unterraum, der durch die Zustände $|j\rangle$ aufgespannt ist (also alle Zustände $|\psi\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j|j\rangle$ enthält) in der Form $H = E_0 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|j\right\rangle\left\langle j\right|$ geschrieben werden kann.

b) Der Gitter-Translationsoperator wirkt auf die lokalisierten Zustände gemäß $T(na)\left|j\right\rangle = \left|j+n\right\rangle,\ n \in \mathbb{Z}$. Rechnen Sie explizit nach, dass H translationsinvariant ist.

c) Wir wissen nun, dass wir H und T simultan diagonalisieren können. Zeigen Sie, dass dies mit den Zuständen $\left|\theta\right\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \exp(ij\theta)\left|j\right\rangle,\ -\pi \le \theta \le \pi$, gelingt.

Um das Modell realistischer zu machen, nehmen wir an, dass die Potentialwände nicht unendlich hoch sind. Es ist dann möglich, weiterhin mit lokalisierten Zuständen $|j\rangle$ zu arbeiten, wobei allerdings die Wellenfunktion $\langle x|j\rangle$ im Bereich der direkten Nachbarionen noch nicht verschwindet. Die Dynamik des Systems erlaubt dann, dass Elektronen von einem Gitterplatz zum nächsten tunneln. Dies wird durch die Einführung von zusätzlichen Matrixelementen $\left\langle i\right| H \left|j\right\rangle = -\Delta$ für $j = i \pm 1$ berücksichtigt.

[1] Beachten Sie, dass wir hier von Wellenfunktionen zu einer angemesseneren Darstellung wechseln!

d) Finden Sie nun eine zu a) analoge Darstellung für H und wiederholen Sie die Aufgabenteile b) und c).

e) Aus Aufgabe 31 wissen wir, dass $\langle x|\theta\rangle = \exp(ikx)u_k(x)$ gilt. Stellen Sie durch Betrachtung von $\langle x|\, T(a)\, |\theta\rangle$ die Beziehung $\theta = ka$ her.

Bemerkung: Insgesamt sollten Sie nun die Dispersionsrelation $E(k) = E_0 - 2\Delta\cos ka$ erhalten haben. Die Einführung einer von Null verschiedenen Tunnelwahrscheinlichkeit führt dazu, dass sich der abzählbar unendlich entartete Energieeigenwert E_0 in ein kontinuierliches Energieband aufspaltet, wie es den meisten aus der Vorlesung über Festkörperphysik bekannt sein wird. Die Entartung ist nun vollständig aufgehoben. Das Intervall $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ definiert die sog. erste Brillouinzone. Aus der Rechnung ergibt sich, dass k-Werte außerhalb dieser Zone redundant sind, denn sie führen zu keinen neuen Zuständen. In einem realistischen System wird es natürlich mehr als nur ein Elektron geben. Berücksichtigt man die Tatsache, dass Elektronen als Fermionen dem Pauli-Prinzip unterliegen und vernachlässigt man die Wechselwirkung zwischen ihnen, so werden am absoluten Temperaturnullpunkt einfach die elektronischen Zustände beginnend von der niedrigsten Energie aufgefüllt.

33. Irreduzible Darstellungen abelscher Gruppen *(2 Punkte)*

Zeigen Sie: Irreduzible Darstellungen abelscher Gruppen sind eindimensional.

34. Aharonov-Bohm-Effekt *(3 Punkte)*

Fassen Sie die Herleitung des Aharonov-Bohm-Effekts zusammen und erläutern Sie dabei, wieso dieser aus Sicht der klassischen Physik so erstaunlich ist.