Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik
Blatt 11

SS 2013

Abgabe: Bis Mittwoch, den 03.07.2013, 12 Uhr im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 05.07.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

35. Tensorprodukt und direkte Summe *(1+1+2+1=5 Punkte)*

Seien $\{|v_1\rangle, \dots |v_n\rangle\}$ eine ONB eines Hilbertraums V und $\{|w_1\rangle, \dots |w_m\rangle\}$ eine ONB eines Hilbertraums W. Dann bilden die Elemente der Form $|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$ eine ONB des Tensorprodukts $V \otimes W$ und die Elemente der Form $|v_i\rangle \oplus 0$ und $0 \oplus |w_j\rangle$ eine ONB der direkten Summe $V \oplus W$, jeweils bzgl. der Skalarprodukte

$$(|v\rangle \otimes |w\rangle, |v'\rangle \otimes |w'\rangle) := \langle v|v'\rangle \cdot \langle w|w'\rangle$$
$$(|v\rangle \oplus |w\rangle, |v'\rangle \oplus |w'\rangle) := \langle v|v'\rangle + \langle w|w'\rangle$$

a) Was sind die Dimensionen von V, W, $V \otimes W$ und $V \oplus W$?

Für Operatoren $A : V \to V$ und $B : W \to W$ ist das Tensorprodukt als $(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) := (A|v\rangle) \otimes (B|w\rangle)$ und die direkte Summe als $(A \oplus B)(|v\rangle \oplus |w\rangle) := (A|v\rangle) \oplus (B|w\rangle)$ definiert. Die Matrixelemente von A und B bzgl. der gegebenen Orthonormalbasen von V und W seien $a_{ij} := \langle v_i|A|v_j\rangle$ und $b_{kl} := \langle w_k|B|w_l\rangle$.

b) Wie lauten die Matrixelemente von $A \otimes B$ und $A \oplus B$?

c) Finden Sie eine Anordnung der Basis von $V \otimes W$, sodass die Matrix von $A \otimes B$ durch das sogenannte Kronecker-Produkt entsteht, in dem alle Einträge von A mit der Matrix B multipliziert werden, also

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

d) Finden Sie eine Anordnung der Basis von $V \oplus W$, sodass die Matrix von $A \oplus B$ blockdiagonal ist, also

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

36. Parität *(1+2+2+1+1+2+2=11 Punkte)*

In dieser Aufgabe sei der Hilbertraum $\mathcal{H}$ aufgespannt durch die drei orthonormalen Eigenvektoren niedrigster Energie $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|2\rangle$ (mit Energien E_0, E_1 bzw. E_2) des Hamiltonoperators H des unendlichen Potentialtopfs im Bereich $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ (vgl. Blatt 3, Aufgabe 8), mit Wellenfunktionen

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$
$$\psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$
$$\psi_2(x) = \langle x|2\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right).$$

Der Paritätsoperator P wirkt auf Wellenfunktionen f gemäß $P(f)(x) := f(-x)$.

a) Zeigen Sie, dass $HP = PH$.

b) Wie wirkt P auf $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|2\rangle$? Finden Sie die Matrixdarstellung von H und P bzgl. der Basis $\{|0\rangle, |2\rangle, |1\rangle\}$.

c) Zeigen Sie, dass $\{|+\rangle, |-\rangle, |1\rangle\}$ mit $|\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |2\rangle)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist. Schreiben Sie die Matrizen von P und H in dieser Basis. Was fällt auf?

Nun wird der Bezug zur darstellungstheoretischen Sprache der Vorlesung hergestellt:

d) Zeigen Sie, dass für die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ (bzgl. Multiplikation) die Zuordnungen $1 \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ und $-1 \mapsto P$ eine Darstellung auf $\mathcal{H}$ ergeben.

e) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $\mathbb{Z}_2$-symmetrisch ist.

f) Finden Sie alle irreduziblen Darstellungsräume $V_\lambda \subset \mathcal{H}$. Identifizieren Sie die isomorphen (=äquivalenten) V_λ, wählen Sie einen Repräsentanten R_λ jeder Isomorphieklasse und schreiben Sie $\mathcal{H}$ als direkte Summe von isotypischen Komponenten $W_\lambda = \mathbb{C}^{m_\lambda} \otimes R_\lambda$.

g) Zeigen Sie, dass die Matrizen in **b)** und **c)** die folgende Form haben ($\mathbb{1}_n$ is die $n \times n$ Identitätsmatrix und der Index λ läuft über alle isotypischen Komponenten):

$$P = \bigoplus_\lambda (\mathbb{1}_{m_\lambda} \otimes P_\lambda)$$
$$H = \bigoplus_\lambda \left(h_\lambda \otimes \mathbb{1}_{\dim(R_\lambda)}\right)$$

37. Sphärischer Käfig *(2+2=4 Punkte)*

In der Vorlesung wurde der sphärische Käfig für den Fall $l = 0$ behandelt. Für allgemeine l ist die (physikalisch sinnvolle) Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f_l(r) = -k^2 f_l(r)$$

gegeben durch ($A_l = \text{const.}$)

$$f_l(r) = A_l \cdot (-r)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l \left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)$$

a) Bestimmen Sie die (unnormierten) Lösungen der radialen Schrödingergleichung für $l = 0$ und 1. Welche Gleichungen müssen durch die Randbedingung bei $r = R$ erfüllt werden?

b) Schreiben Sie mit Hilfe der Funktionen $f_l(r)$ jeweils ein Beispiel einer (unnormierten) Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi)$ eines stationären Zustands für $l = 0$ und 1 auf. Skizzieren Sie den radialen Anteil $r^2|f_0(r)|^2$ der Wahrscheinlichkeitsdichte für die drei niedrigsten Energien.