Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 12

SS 2013

Abgabe: Bis **Mittwoch**, den 10.07.2013, **12 Uhr** im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 12.07.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor
Achtung: Auch die nächste Tagung dünnt unseren Übungsleiterbestand aus. Am 05.07. finden Gruppe 1 und 2 im Seminarraum Theorie statt.

38. $\mathfrak{so}(3)$-Darstellungen algebraisch *(2+2+2+1=7 Punkte)*

Wir wollen in dieser Aufgabe noch einmal algebraisch die Eigenschaften der irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ herleiten. Die Darstellungen der Generatoren durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum bezeichnen wir hier mit L_i, den Casimir-Operator mit L^2. Zur Erinnerung: Aus der Vorlesung kennen Sie bereits die Vertauschungsrelationen

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad [L^2, L_i] = 0.$$

Zusätzlich definieren wir die Operatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$. Da L^2 mit L_z vertauscht, können beide Operatoren simultan diagonalisiert werden. Wir bezeichnen die Eigenzustände mit $|l, m\rangle$ und halten uns an die in der Quantenmechanik üblichen Konventionen

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l + 1) |l, m\rangle .$$

a) Zeigen Sie zur Vorbereitung folgende Beziehungen:

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z \quad L^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2 = L_-L_+ + \hbar L_z + L_z^2.$$

b) Zeigen Sie, dass die Zustände $L_\pm |l, m\rangle$ Eigenzustände der Operatoren L^2 und L_z sind. Wie lauten die Eigenwerte?

c) Berechnen Sie nun die Norm der Zustände $L_\pm |l, m\rangle$. Folgern Sie, dass $|m| \leq l$ gelten muss.

d) Für ein gegebenes l folgt aus der vorhergehenden Teilaufgabe $L_- |l, -l\rangle = 0$ und $L_+ |l, l\rangle = 0$. Folgern Sie nun, dass $l = \frac{n}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ sein muss.

Bemerkung: Ingesamt haben wir gesehen, dass es zu jedem l einen Zustand $|l, l\rangle$ mit maximaler magnetischer Quantenzahl $m = l$ gibt. Die gesamte irreduzible Darstellung für dieses l kann erzeugt werden, indem man den Absteigeoperator L_- wiederholt auf diesen Zustand anwendet. Das Verfahren bricht ab, sobald $|l, -l\rangle$ erreicht ist. Die üblichen Lehrbücher über Quantenmechanik verschweigen es Ihnen, aber: Diese zunächst unscheinbare Methode funktioniert mit geringfügigen Verallgemeinerungen für jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Genauer gesagt geht man zur Komplexifizierung $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ über, in der es i.d.R. mehrere unabhängige Absteigeoperatoren und Verallgemeinerungen von L_z gibt. Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung enthält einen sog. Vektor höchsten Gewichts (oben war dies $|l, l\rangle$) und man kann die gesamte Darstellung erhalten, indem man man man die Absteigeoperatoren anwendet.

39. Exponentialabbildung *(2+2+2+2+2=10 Punkte)*

Der Rückweg von einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in die Lie-Gruppe G führt über die Exponentialabbildung. Stellen Sie sich der Konkretheit halber Matrix-Lie-Gruppen vor: Für Drehmatrizen gilt etwa $R_{e,\phi} = \exp(\phi \mathcal{L}_e)$. Allgemein definiert ein Element $X \in \mathfrak{g}$ eine Kurve $\gamma : t \mapsto \exp(tX)$ in G mit $\gamma'(0) = X$. Wir üben in dieser Aufgabe das Rechnen mit der Exponentialabbildung und werden hierbei auch zeigen, dass das Differential einer G-Darstellung eine $\mathfrak{g}$-Darstellung ist.

a) Machen Sie sich zunächst klar, dass die eingangs gemachten Behauptungen überhaupt plausibel sind. Geben Sie hierzu die Drehmatrix $R_{e_z,\phi}$ konkret an, differenzieren Sie an $\phi = 0$ und exponentieren Sie das Ergebnis.

b) Die Existenz des Vektorraums $\mathfrak{g}$ zeichnet eine besondere G-Darstellung aus, die sog. adjungierte Darstellung $Ad : G \mapsto GL(\mathfrak{g}),\ g \in G \mapsto \{X \in \mathfrak{g} \mapsto gXg^{-1}\}$, d.h. $Ad(g)(X) = gXg^{-1}$. Zeigen Sie zunächst, dass dies wirklich eine Darstellung ist. Sie müssen dazu auch überprüfen, dass diese Vorschrift wohldefiniert ist, also dass $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$.

c) Man kann mit Hilfe der Exponentialabbildung leicht die Lie-Klammer erhalten. Zeigen Sie $d/dt|_{t=0} \exp(tX) Y \exp(-tX) = [X, Y]$. Die Klammer ist also gewissermaßen die linearisierte Version der Konjugation mit einem Gruppenelement und stiftet eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf sich selbst vermöge $ad : \mathfrak{g} \mapsto GL(g),\ X \mapsto \{Y \mapsto [X, Y]\}$.

Sei nun $\rho : G \mapsto GL(V)$ eine G-Darstellung. Diese induziert die Abbildung $\rho_* : X \in \mathfrak{g} \mapsto \rho_*(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\rho(\exp(tX)))$. Wie angekündigt wollen wir letztlich beweisen, dass dies eine Lie-Algebra-Darstellung ist.

d) Zeigen Sie zunächst $\rho(\exp(tX)) = \exp(t\rho_*(X))$ und $\rho_*(gXg^{-1}) = \rho(g)\rho_*(X)\rho(g^{-1})$.

e) Verwenden Sie dies, um ans Ziel zu gelangen: Zeigen Sie also, dass gilt $\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)]$.

40. Hantelmolekül *(1+2+1=4 Punkte)*

Ein starres Hantelmolekül, das um einen festen Punkt rotiert, kann durch den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2\Theta} L^2$ beschrieben werden. $\Theta \in \mathbb{R}$ bezeichnet hierbei das Trägheitsmoment.

a) Geben Sie die Energieeigenwerte und deren Entartungsgrad an.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinde sich das Molekül in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion $\psi(\theta, \phi) = N(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\cos(2\phi))$ beschrieben wird.

b) Entwickeln Sie diesen Zustand nach Eigenzuständen von H.

c) Die magnetische Quantenzahl m (der Eigenwert von L_z) soll gemessen werden. Welche möglichen Messwerte gibt es und mit welcher Wahrscheinlichkeit treten diese auf?