Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 13

SS 2013

ACHTUNG: Bitte **Namen und Matrikelnummer** auf die Abgabe schreiben!
Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.07.2013, 12 Uhr im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 19.07.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

41. Spin

(3+1+1+3+2+2+2+2+3+1=20 Punkte)

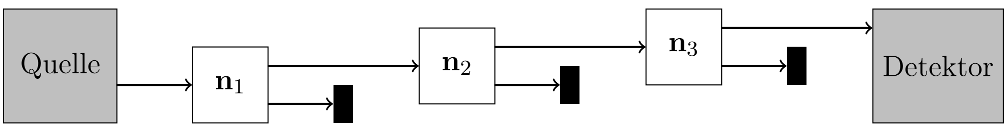
Sei $\mathbf{n} := n_x\mathbf{e_x} + n_y\mathbf{e_y} + n_z\mathbf{e_z} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. In der Basis von Spineigenzuständen in z-Richtung, $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, entsprechen die Eigenzustände des hermiteschen Operators $S(\mathbf{n}) := \frac{\hbar}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2}(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)$ einem Spinzustand "Spin oben" (positiver Eigenwert) bzw. "Spin unten" (negativer Eigenwert) in die $\mathbf{n}$-Richtung.

a) Drücken Sie $\mathbf{n}$ in Polarkoordinaten $\phi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ aus und finden Sie die Eigenwerte und normierten Eigenzustände $|\mathbf{n}, \uparrow\rangle$ und $|\mathbf{n}, \downarrow\rangle$ von $S(\mathbf{n})$. Zeigen Sie, dass sich der Eigenzustand $|\mathbf{n}, \uparrow\rangle$ zum positiven Eigenwert mit einem geeigneten globalen Phasenfaktor in der Form $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle$ schreiben lässt. Diese Art der Darstellung ist in der Quanteninformationstheorie beliebt und nennt sich Blochsphärendarstellung (ϕ und θ parameterisieren die "Blochsphäre").

b) Wie lauten die Eigenzustände für $\mathbf{n} = \mathbf{e_x}$, $\mathbf{n} = \mathbf{e_y}$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e_z}$?

c) Welche Form hat $S(\mathbf{n})$ in der Basis $\{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle, |\mathbf{n}, \downarrow\rangle\}$? Mit einer geeigneten Wahl der Basis kann also jede Richtung als z-Richtung gesehen werden. So sollte es auch sein, denn die Wahl der z-Achse ist willkürlich.

Im Stern-Gerlach-Experiment wird ein inhomogenes Magnetfeld so in die $\mathbf{n}$-Richtung ausgerichtet, dass ein Strahl von Silberatomen, die sich zunächst in beliebigen Spinzuständen befinden, geteilt wird. Einer der zwei Strahlen besteht daraufhin aus Atomen im Zustand $|\mathbf{n}, \uparrow\rangle$ und der andere aus Atomen im Zustand $|\mathbf{n}, \downarrow\rangle$, es wird also eine Messung bezüglich der Basis $\{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle, |\mathbf{n}, \downarrow\rangle\}$ bzw. des Operators $S(\mathbf{n})$ durchgeführt. Betrachten Sie nun einen Aufbau mit drei solcher Magneten, in dem nur der Strahl mit positivem Eigenwert jeweils den nächsten Magneten erreichen kann (siehe Abbildung). Die Ausrichtungen der drei Magneten seien $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ und $\mathbf{n}_3$.



d) Ein einzelnes Silberatom verlasse die Quelle im Zustand $|\uparrow\rangle \equiv |\mathbf{e_z}, \uparrow\rangle$. Betrachten Sie die folgenden zwei Einstellungen des Experiments:

i) $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e_z}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e_z}$, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{e_z}$

ii) $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e_z}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e_x}$, $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{e_z}$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Atom jeweils am Detektor an? In welchem Zustand befindet es sich, falls es ankommt?

Im EPR-Experiment werden **zwei** Teilchen betrachtet, die durch einen Zerfall entstehen, sodass der Hilbertraum von $\mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ erweitert werden muss. Nach dem Zerfall befinden sie sich im Singlet-Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \big),$$

wobei sie sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen (die Faktoren des Hilbertraums stehen jeweils für eine dieser Richtungen). Es folgen zwei Messungen gemäß der Operatoren $A(\mathbf{n}) := \frac{2}{\hbar}(S(\mathbf{n}) \otimes \mathbb{1})$ in der ersten Richtung und $B(\mathbf{m}) := \frac{2}{\hbar}(\mathbb{1} \otimes S(\mathbf{m}))$ in der anderen Richtung.

e) Zeigen Sie, dass derselbe Basiswechsel in beiden Faktoren des Hilbertraums den Singlet-Zustand unverändert lässt (bis auf einen globalen Phasenfaktor), also dass

$$|\psi\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\mathbf{n},\uparrow\rangle \otimes |\mathbf{n},\downarrow\rangle - |\mathbf{n},\downarrow\rangle \otimes |\mathbf{n},\uparrow\rangle \big).$$

f) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $E(\mathbf{n},\mathbf{m}) := \langle\psi| A(\mathbf{n})B(\mathbf{m}) |\psi\rangle$ gegeben ist durch

$$E(\mathbf{n},\mathbf{m}) = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}.$$

g) In der Vorlesung wurde gezeigt: Jede lokale Theorie mit versteckten Variablen muss die Ungleichungen

$$-2 \leq E(\mathbf{n}_1,\mathbf{m}_1) + E(\mathbf{n}_1,\mathbf{m}_2) + E(\mathbf{n}_2,\mathbf{m}_1) - E(\mathbf{n}_2,\mathbf{m}_2) \leq 2$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass folgende Wahl der Ausrichtungen diese Ungleichungen verletzen kann und bestimmen Sie die Werte von α für die diese Verletzung maximal ist:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e_z} \qquad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e_x} \qquad \mathbf{m}_1 = \cos(\alpha)\mathbf{e_x} + \sin(\alpha)\mathbf{e_z} \qquad \mathbf{m}_2 = -\sin(\alpha)\mathbf{e_x} + \cos(\alpha)\mathbf{e_z}$$

Betrachten Sie nun wieder **ein** Teilchen, das sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e_z}$ befindet, sodass der Hamiltonoperator $H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ lautet mit $\omega := \frac{eB}{m}$.

h) Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand des Teilchens $|\psi(0)\rangle = |\mathbf{n},\uparrow\rangle$. Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung $|\psi(t)\rangle$.

i) Bestimmen Sie die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} x(t) &:= \langle\psi(t)| S(\mathbf{e_x}) |\psi(t)\rangle, \\ y(t) &:= \langle\psi(t)| S(\mathbf{e_y}) |\psi(t)\rangle \\ \text{und } z(t) &:= \langle\psi(t)| S(\mathbf{e_z}) |\psi(t)\rangle. \end{aligned}$$

Welche Bewegung führt der Vektor $x(t)\mathbf{e_x} + y(t)\mathbf{e_y} + z(t)\mathbf{e_z}$ aus? Welche Periode T hat diese Bewegung?

j) Bestimmen Sie $|\psi(T)\rangle$. Was fällt auf?

Hinweis zur Klausurvorbereitung:
Die Fragestunde (montags ab 13:30 Uhr im Büro 1.02 des Containers) wird bis zur Klausur am 06.08. weiterhin angeboten.