
Quantenphysik

Blatt 2

SS 2013

Abgabe: Mittwoch, den 24.04.2013 im Briefkasten vor dem Theorie-Institut

Besprechung: Freitag, den 26.04.2013 in den Übungsstunden

Website: <http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor>

5. Potentialtöpfe I

(2+2=4 Punkte)

Betrachten Sie die stationäre Schrödingergleichung $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + U(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und berechnen Sie die normierten gebundenen Zustände sowie die zugehörigen Energien für die folgenden Systeme:

- Einen Topf mit unendlich hohen Wänden (auch als "Teilchen in der Box" bekannt), die sich in $x = 0$ und $x = a > 0$ befinden, also $\mathcal{H} = \{f | f \in L^2([0, a]) \text{ und } f(0) = f(a) = 0\}$ und $U(x) = 0$ für alle $x \in [0, a]$.
- Einen δ -Potentialtopf, d.h. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ und $U(x) = \lambda \delta(x)$ mit $\lambda < 0$. Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Lösung in $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar ist und berechnen Sie die Höhe des Sprungs der ersten Ableitung.

6. Potentialtöpfe II

(1+1+1+1+1=5 Punkte)

Diesmal betrachten wir einen endlich tiefen Potentialtopf, d.h. in der Notation von Aufgabe 5

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \text{ und } U(x) = \begin{cases} \lambda & \text{falls } |x| > a \\ 0 & \text{falls } |x| \leq a \end{cases} \text{ mit } \lambda > 0.$$

- Begründen Sie, dass

$$\psi(x) = \begin{cases} A \exp(lx) & \text{falls } x < -a \\ B \sin(kx) + C \cos(kx) & \text{falls } |x| \leq a \\ D \exp(-lx) & \text{falls } x > a \end{cases}$$

ein geeigneter Ansatz zur Lösung der stationären Schrödingergleichung ist. Welche Anschlussbedingungen müssen in $x = \pm a$ erfüllt werden und warum?

- Alle Lösungen der Schrödingergleichung sind gerade oder ungerade. Zeigen Sie, dass aus den Anschlussbedingungen die Gleichungen $l = k \tan(ka)$ bzw. $l = -k \cot(ka)$ folgen.
- Finden Sie einen Zusammenhang zwischen l und k und lösen Sie die Gleichungen grafisch.
- Zeigen Sie, dass es immer einen gebundenen Zustand gibt.
- Reproduzieren Sie aus Ihren Ergebnissen die Energieeigenwerte aus Aufgabe 5a.

7. Gauß'sches Wellenpaket

(1+1+2+2+1+2=9 Punkte)

Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Raumdimension wird durch eine Wellenfunktion $\psi(x, t)$ beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\right)\psi(x, t) = 0$$

(mit geeigneter Anfangsbedingung $\psi(x, 0)$) ergibt.

- a) Wir setzen eine Wellenlösung der Form $\psi_k(x, t) = \exp(i(kx - \omega t))$ an. Die Wellenzahl k und die Frequenz ω (beide reell) sind freie Parameter. Zeigen Sie, dass ψ_k die Schrödingergleichung erfüllt, sofern k und ω durch $\omega(k) := \frac{\hbar k^2}{2m}$ verknüpft sind.
- b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion vorgegeben, $\psi(x, 0) \equiv \psi(x)$. Die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellenfunktion sei $\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \exp(-ikx) \psi(x)$. Zeigen Sie, dass sich mit $\omega = \omega(k)$ aus a) die Wellenfunktion zur Zeit t schreiben lässt als

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \exp(i(kx - \omega t)) \tilde{\psi}(k),$$

d.h. in dieser Form die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.

- c) Im Rest der Aufgabe betrachten wir speziell das durch

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2} + ik_0x\right)$$

definierte Gaußpaket. σ_0 und k_0 sind reelle Parameter. Berechnen Sie $\tilde{\psi}(k)$ und damit $\psi(x, t)$ für das Gaußpaket. Welche Bedeutung kommt σ_0 und k_0 in diesem Kontext zu?

- d) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = |\psi(x, t)|^2$ des Gaußpakets die Form

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - v_0t)^2\right) \text{ mit } \sigma^2 := \sigma_0^2 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right), \quad v_0 := \frac{\hbar k_0}{m}, \quad \tau := \frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}$$

annimmt und diskutieren Sie dieses Ergebnis.

- e) Berechnen Sie für das Gaußpaket den Orts- und Impulsmittelwert und vergleichen Sie das Ergebnis mit d).
- f) Berechnen Sie die Varianzen von Ort und Impuls im Gaußpaket.