
Quantenphysik

Blatt 3

SS 2013

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 02.05.2013, 10 Uhr** im Briefkasten vor dem Theorie-Institut

Besprechung: Freitag, den 03.05.2013 in den Übungsstunden

Website: <http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor>

8. Vollständigkeit

(1+1+2=4 Punkte)

In der letzten Übung wurde der Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = a$ behandelt. Die Berechnung der normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators ergab

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Elemente der Menge $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraums $\mathcal{H} = \{f | f \in L^2([0, a]) \text{ mit } f(0) = f(a) = 0\}$. Sei nun folgende Wellenfunktion $\Psi \in \mathcal{H}$ gegeben:

$$\Psi(x) = \begin{cases} Nx & \text{wenn } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ N(a-x) & \text{wenn } \frac{a}{2} < x \leq a \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie Ψ und bestimmen Sie N , sodass Ψ normiert ist.
- b) Vollständigkeit bedeutet, dass sich jedes beliebige Element $f \in \mathcal{H}$ schreiben lässt als $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$. Zeigen Sie, dass $a_n = (\phi_n, f)$.
- c) Bestimmen Sie nun Koeffizienten a_n , um Ψ als Linearkombination $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ zu schreiben. (Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen geraden und ungeraden n .)

9. Darstellungen

(1+3=4 Punkte)

Sei $\mathbb{R}^3$ der dreidimensionale Vektorraum, auf dem die Drehgruppe $SO(3)$ in der üblichen Weise operiert. (Notation: $g \in SO(3)$ angewandt auf $x \in \mathbb{R}^3$ ergibt $g \cdot x \in \mathbb{R}^3$.) Weiter sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ der Hilbertraum der Lebesgue-quadratintegrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f_1(x)} f_2(x) d^3x$.

- a) Zeigen Sie, dass durch

$$(\mathcal{D}(g)f)(x) := f(g^{-1} \cdot x)$$

eine Darstellung $\mathcal{D} : SO(3) \rightarrow GL(\mathcal{H})$ definiert ist.

- b) Zeigen Sie, dass diese Darstellung unitär ist. Ist sie reduzibel?

10. Heisenberg-Gruppe

(2+2=4 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Heisenberg-Gruppe H_n zum Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ definiert als Gruppe von Matrizen der Form

$$g_{a,b,c} := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & c \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ \mathbf{0} & \text{Id}_n & b \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

bezüglich der üblichen Matrixmultiplikation. Dabei sind $a \in (\mathbb{R}^n)^*$ (Zeilenvektor), $b \in \mathbb{R}^n$ (Spaltenvektor) und $c \in \mathbb{R}$. Im Folgenden wird der Fall $n = 1$ betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass H_1 tatsächlich eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass die Wirkung von H_1 auf $f \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$(\mathcal{D}(g_{a,b,c})f)(x) := e^{i(bx-c)/\hbar} f(x-a) \quad (2)$$

eine Darstellung definiert, die zudem unitär ist (bezüglich des üblichen Skalarprodukts $(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx$).