Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 4

SS 2013

Abgabe: Mittwoch, den 08.05.2013 im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 10.05.2013 in der **Globalübung um ca. 10:45 in HS III**
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor

11. Drei Operatoridentitäten *(1+1+1=3 Punkte)*

Zeigen Sie folgende Operatoridentitäten:

a) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ und $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$,

b) für alle $k \in \mathbb{N}$: $[A^k, B] = kA^{k-1}[A, B]$, falls $[A, [A, B]] = 0$ ist,

c) $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$ für ein analytisches f, falls $[A, [A, B]] = 0$ ist.

12. Rechnen mit Auf- und Absteigeoperatoren *(2+2=4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle m|\, x\, |n\rangle$, $\langle m|\, x^2\, |n\rangle$, $\langle m|\, p\, |n\rangle$ und $\langle m|\, p^2\, |n\rangle$. $|n\rangle$ bezeichnet dabei den n. Oszillatorzustand.

b) Wir betrachten zwei *unabhängige* harmonische Oszillatoren, deren Auf- und Absteigeoperatoren wir mit $a, a^\dagger$ bzw. $b, b^\dagger$ bezeichnen. Unabhängig bedeutet dabei $[a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = [a^\dagger, b^\dagger] = 0$. Seien nun

$$J^+ = \hbar a^\dagger b,\ J^- = \hbar b^\dagger a,\ J^z = \frac{\hbar}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b),\ N = a^\dagger a + b^\dagger b.$$

Zeigen Sie, dass

$$[J^z, J^\pm] = \pm\hbar J^\pm,\ [J^2, J^z] = 0,\ J^2 = \frac{\hbar^2}{2} N \left[\left(\frac{N}{2} \right) + 1 \right]$$

gilt. Dabei ist $J^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J^zJ^z$.

13. Baker-Campbell-Hausdorff-Formel *(2 Punkte)*

Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\exp(B)A\exp(-B) = A + [B, A] + \frac{1}{2}[B, [B, A]] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, A]_n$$

$$\text{mit } [B, A]_{n+1} = [B, [B, A]_n],\quad [B, A]_0 = A.$$

Tipp: Stellen Sie eine DGL 1. Ordnung für die operatorwertige Funktion $C(\lambda) := \exp(\lambda B)A\exp(-\lambda B)$ auf und lösen Sie diese.

14. Kohärente Zustände *(2+1+2+3+2=10 Punkte)*

Um Missverständnisse zu vermeiden sind in dieser Aufgabe alle Operatoren fettgedruckt. Mit Hilfe der Translationsoperatoren $\mathbf{T}_{x_0} := \exp(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}x_0)$ und $\mathbf{T}_{p_0} := \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{x}p_0)$ für Ort und Impuls bilden wir einen unitären Operator $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K} := \exp(-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}p_0 x_0)\mathbf{T}_{p_0}\mathbf{T}_{x_0} = \exp(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{x}p_0 - \mathbf{p}x_0)) = \exp(z\mathbf{b}^\dagger - \bar{z}\mathbf{b}) =: \mathbf{K}(z),$$

der von dem komplexen Parameter

$$z := \frac{1}{\sqrt{2}l}x_0 + \frac{il}{\sqrt{2}\hbar}p_0 \text{ mit Betragsquadrat } |z|^2 = z\bar{z} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\right)$$

abhängt. $\mathbf{b}^\dagger$ und $\mathbf{b}$ sind Auf- und Absteigeoperatoren, $l := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ die "Oszillatorlänge". Der Operator $\mathbf{K}$ erzeugt aus dem Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators die sogenannten kohärenten Zustände

$$|z\rangle := \mathbf{K}(z)\,|0\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\exp(z\mathbf{b}^\dagger)\,|0\rangle \text{ mit } z \in \mathbb{C},$$

deren Eigenschaften wir im Folgenden studieren wollen.

a) Beweisen Sie die Gleichheit der in der Definition von $\mathbf{K}$ bzw. $|z\rangle$ verwendeten Ausdrücke. Benutzen Sie dabei neben der bekannten Darstellung von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren die Regel $\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B})\exp(-\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}])$, falls $[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0$ ist. Wie lautet der Zustand $|z\rangle$ in Ortsdarstellung?

b) Zeigen Sie, dass $|z\rangle$ normierter Eigenzustand zu $\mathbf{b}$ mit Eigenwert z ist. Hinweis: 11)c).

c) Beweisen Sie folgende Entwicklung von $|z\rangle$ nach den stationären Zuständen $|n\rangle$ des Oszillators:

$$|z\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

Welche ist demnach die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energieeigenwerte?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Schwankungsquadrate von Energie, Ort und Impuls im Zustand $|z\rangle$. Was fällt auf?

e) Berechnen Sie die entsprechenden Größen für den zeitabhängigen Zustand

$$|z\rangle_t := \exp(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t)\,|z\rangle \text{ mit } \mathbf{H} = \hbar\omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right).$$

Hinweis: Für die Rechnung können die unter dem Namen "Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln" bekannten Beziehungen

$$\exp(\mathbf{B})\mathbf{A}\exp(-\mathbf{B}) = \mathbf{A} + [\mathbf{B},\mathbf{A}] + \frac{1}{2}[\mathbf{B},[\mathbf{B},\mathbf{A}]] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\mathbf{B},\mathbf{A}]_n$$

$$\text{mit } [\mathbf{B},\mathbf{A}]_{n+1} = [\mathbf{B},[\mathbf{B},\mathbf{A}]_n],\quad [\mathbf{B},\mathbf{A}]_0 = \mathbf{A}$$

bzw.

$$\exp(\mathbf{B})\exp(\mathbf{A})\exp(-\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{C}) \text{ mit } \mathbf{C} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\mathbf{B},\mathbf{A}]_n$$

verwendet werden.