

Quantenphysik Blatt 5

SS 2013

Abgabe: Bis Mittwoch, den 15.05.2013, 10 Uhr im Briefkasten vor dem Theorie-Institut

Besprechung: Freitag, den 17.05.2013 in den Übungsstunden

Website: <http://www.thp.uni-koeln.de/~dwieczor>

Nachklausurtermin: 01.10.2013, 13:30 Uhr in Hörsaal II

15. Geometrische Phase

(1+2+1=4 Punkte)

In der Vorlesung und der letzten Übung wurde der kohärente Zustand $|z\rangle = \mathbf{T}_{(x_0, p_0)}|0\rangle = e^{\frac{i}{2\hbar}x_0 p_0} \mathbf{T}_{x_0} \mathbf{T}_{p_0}|0\rangle$ des harmonischen Oszillators behandelt. Der Operator $\mathbf{T}_{(x_0, p_0)}$ bewirkt eine Verschiebung im Phasenraum um x_0 in Ortsrichtung und p_0 in Impulsrichtung, sodass $|z\rangle$ der im Phasenraum verschobene Grundzustand ist. Wie in der Vorlesung gezeigt, gilt die Relation

$$\mathbf{T}_{(x_0, p_0)} \mathbf{T}_{(x'_0, p'_0)} = e^{\frac{i}{2\hbar}(x'_0 p_0 - x_0 p'_0)} \mathbf{T}_{(x_0 + x'_0, p_0 + p'_0)}. \quad (1)$$

Ein Zustand soll nun im Phasenraum entlang des Parallelogramms

$$(0, 0) \rightarrow (x_0, p_0) \rightarrow (x_0 + x'_0, p_0 + p'_0) \rightarrow (x'_0, p'_0) \rightarrow (0, 0)$$

in N Schritten pro Strecke verschoben werden. Der entsprechende Operator lautet

$$\left(\mathbf{T}_{(x'_0/N, p'_0/N)}^{-1}\right)^N \left(\mathbf{T}_{(x_0/N, p_0/N)}^{-1}\right)^N \left(\mathbf{T}_{(x'_0/N, p'_0/N)}\right)^N \left(\mathbf{T}_{(x_0/N, p_0/N)}\right)^N \quad (2)$$

- a) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbf{T}_{(x_0/N, p_0/N)}\right)^N = \mathbf{T}_{(x_0, p_0)}$ und $\mathbf{T}_{(x_0, p_0)}^{-1} = \mathbf{T}_{(-x_0, -p_0)}$.
- b) Zeigen Sie, dass der Operator (2) proportional zur Identität ist mit einer Phase als Proportionalitätskonstante.
- c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des eingeschlossenen Parallelogramms in der Phasenraumbene und vergleichen Sie mit der sogenannten geometrischen Phase aus b).

16. Propagatoren

(1+3+2+1+1+2=10 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Propagator für den harmonischen Oszillator hergeleitet:

$$K(x, y; t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega t)}} \exp \left[\frac{im\omega}{\hbar} \frac{(x^2 + y^2) \cos(\omega t) - 2xy}{2 \sin(\omega t)} \right] \quad (3)$$

- a) Verifizieren Sie, dass im Limes $\omega \rightarrow 0$, in dem das Potential des harmonischen Oszillators verschwindet, der obige Propagator der eines freien Teilchens ist.

Betrachten Sie nun das Gausspaket aus Übungsaufgabe 7 als Anfangszustand zur Zeit $t = 0$. Es hat einen anfänglichen Impuls p_0 und ist um den Ursprung zentriert:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\sigma_0^2} + i \frac{p_0 x}{\hbar} \right] \quad (4)$$

- b) Benutzen Sie den Propagator (3) um zu zeigen, dass die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ wieder Gaussform hat. Wie entwickelt sich die Breite $\sigma(t)$ mit der Zeit (wobei $\sigma(0) = \sigma_0$)?
- c) Für welchen Wert von σ_0 ist die Breite zeitunabhängig, also $\sigma(t) = \sigma_0$ für alle $t \geq 0$? Die Wahrscheinlichkeitsdichte mit diesem Wert von σ_0 und $p_0 = 0$ sollte Ihnen bekannt vorkommen - um welche handelt es sich? Und für $p_0 \neq 0$?

Die Wurzel einer komplexen Zahl ist nur bis auf ein Vorzeichen bestimmt: $\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\phi}} = \pm r^{1/2} e^{i\phi/2} = \pm z^{1/2}$. Um den Vorfaktor des Propagators (3) zu verstehen, muss dieses Vorzeichen bestimmt werden. Durch die Herleitung in der Vorlesung wird klar, dass die Wurzel als

$$\sqrt{\frac{1}{2i \sin(\omega t)}} := \frac{e^{-i\omega t/2}}{(1 - e^{-2i\omega t})^{1/2}} \quad (5)$$

zu interpretieren ist.

- d) Zeigen Sie, dass

$$K\left(x, y; t + \frac{n\pi}{\omega}\right) = (-i)^n K((-1)^n x, y; t)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun ein Wellenpaket mit beliebiger Form gegeben, das zu einer Zeit t_0 einen Impuls p_0 hat und um x_0 zentriert ist:

$$\psi(x, t_0) = e^{ip_0 x/\hbar} f(x - x_0), \quad (6)$$

wobei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Funktion in $L^2(\mathbb{R})$ ist, die die Form bestimmt.

- e) Bestimmen Sie $\psi\left(x, t_0 + \frac{2n\pi}{\omega}\right)$ und $\psi\left(x, t_0 + \frac{(2n+1)\pi}{\omega}\right)$. (Hinweis: **d**.)

- f) Interpretieren Sie das Ergebnis aus e).

17. Ehrenfest-Theorem

(2+2+2=6 Punkte)

Sei A ein linearer Operator und $\langle A \rangle := (\psi, A\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x, t)} A\psi(x, t)$ der Erwartungswert (oder Mittelwert) im Zustand $\psi(x, t)$. Letzterer genügt der Schrödingergleichung $H\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$, mit $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$.

- a) Beweisen Sie das Ehrenfest-Theorem:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \quad (7)$$

Hinweis: $H = H^\dagger$.

- b) Nutzen Sie a) um zu zeigen, dass

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m}, \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\langle V'(x) \rangle \quad \text{und} \quad m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \langle F(x) \rangle, \quad (8)$$

wobei $F(x) = -V'(x)$.

- c) Damit die Erwartungswerte den klassischen Bewegungsgleichungen genügen, muss in der letzten Gleichung $\langle F(x) \rangle = F(\langle x \rangle)$ gelten. Für welche Kräfte gilt diese Relation? Gilt Sie für eine freie Bewegung? Und für den harmonischen Oszillator? (Hinweis: Entwickeln Sie F um $\langle x \rangle$ bis zur zweiten Ordnung.)