Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Martin Zirnbauer
Ricardo Kennedy, Daniel Wieczorek

Quantenphysik

Blatt 6

SS 2013

Abgabe: Mittwoch, den 29.05.2013 im Briefkasten vor dem Theorie-Institut
Besprechung: Freitag, den 31.05.2013 in der **Globalübung um ca. 10:45 in HS III**
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/∼dwieczor
Hinweis: Dieser Zettel enthält 10 **Bonuspunkte**, d.h. es gehen nur 21 der erreichbaren Punkte in die Bestimmung der 100%−Marke ein.

18. Schurs Lemma *(3+2=5 Punkte)*

a) Beweisen Sie Schurs Lemma: Seien V_1, V_2 endlichdimensionale Vektorräume und $\rho_1 : G \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ irreduzible Darstellungen einer Gruppe G. Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ $G-$äquivariant (d.h. gilt $\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$), so ist φ entweder die Nullabbildung oder ein Isomorphismus. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass kerφ und imφ invariante Unterräume sind.

b) Folgern Sie: Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}-$Vektorraum und ρ eine irreduzible $G-$Darstellung, dann ist jedes $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ ein Vielfaches der Identität.

19. Bargmann-Darstellung *(2+2=4 Punkte)*

Die zu einem Zustand $|f\rangle$ gehörende holomorphe Bargmann-Funktion berechnet sich gemäß $f(z) = \langle 0| e^{zb} |f\rangle$, wobei $|0\rangle$ der Oszillator-Grundzustand und b der Absteigeoperator ist.

a) Berechnen Sie die Bargmann-Funktionen zu den Eigenzuständen $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators und zu einem kohärenten Zustand $|w\rangle$.

b) Zeigen Sie: Die Translationsoperatoren T_w der Heisenberg-Gruppe wirken auf die holomorphen Funktionen $f \in B_{\mathbb{C}}$ der Bargmann-Darstellung durch

$$(T_w f)(z) = \exp(-|w|^2/2 + wz) f(z - \bar{w}).$$

20. Asymptotische Entwicklung *(3 Punkte)*

Bestätigen Sie durch eine direkte Rechnung die in der Vorlesung erwähnte asymptotische Entwicklung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Nf(x)} dx = \left(\frac{2\pi}{N f''(x_0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-Nf(x_0)} \left(1 + \frac{5}{24N} \frac{(f^{(3)}(x_0))^2}{(f''(x_0))^3} - \frac{1}{8N} \frac{f^{(4)}(x_0)}{(f''(x_0))^2} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right)$$

für $N \to \infty$. Hierbei ist x_0 das lokale Minimum der $C^\infty-$Funktion f. Hinweis: Entwickeln Sie f um x_0 und verwenden Sie den Term zweiter Ordnung, um auf Gaußintegrale zu sprechen zu kommen. Identifiziern Sie dann die drei Integrale, die bis einschließlich $\mathcal{O}(N^{-1})$ beitragen. Sie dürfen diese mit einem CAS berechnen.

21. Van Vleck-Propagator *(2+4=6 Punkte)*

Der van Vleck-Propagator

$$K_{cl} = \sum_{\gamma_{cl}} \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_f} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S(q_i, q_f; T)}$$

wird bestimmt durch das Hamiltonsche Wirkungsfunktional,

$$S = \int_\gamma (pdq - Hdt),$$

ausgewertet auf klassichen Pfaden $\gamma_{cl} : [0,T] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R};\ t \mapsto (q(t), p(t), t)$ im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ zu den Randbedingungen $q(0) = q_i$ und $q(T) = q_f$. Berechnen Sie den van Vleck-Propagator für die Fälle

a) freie Bewegung in einer Dimension,

b) harmonischer Oszillator.

Ergibt sich eine Übereinstimmung mit den bekannten exakten Ergebnissen für den Propagator?

22. Rückkehrwahrscheinlichkeit *(2+1+1+2+1+1+2+1+2=13 Punkte)*

Wir wollen in dieser Aufgabe die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein Teilchen in einem symmetrischen Potential V mit $V(q) = V(-q)$ nach einer Zeit t nach $q = 0$ zurückkehrt, wenn es sich dort zum Zeitpunkt 0 befand. Wir werden dazu zunächst die Lagrangesche Version des Feynman-Pfadintegrals herleiten.

a) Sie kennen bereits das eindimensionale Gaußintegral $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$. Zeigen Sie nun für eine symmetrische, positiv definite $n \times n-$Matrix A die mehrdimensionale Verallgemeinerung

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^T A x} d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}.$$

b) Folgern Sie nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}x^T A x + j^T x} d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} e^{\frac{1}{2} j^T A^{-1} j}.$$

c) In der Vorlesung wurde der quantenmechanische Propagator durch das Hamiltonsche Pfadintegral ausgedrückt:

$$K(q_i, q_f, t) = \int_{q(t)=q_f, q(0)=q_i} \mathcal{D}q e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V(q) dt'} \int \mathcal{D}p e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \left(\frac{p^2}{2m} - p\dot{q}\right) dt'}.$$

Verwenden Sie die "unendlichdimensionale Verallgemeinerung" von b)[1] um zu zeigen, dass man den Propagator auch als Lagrangesches Pfadintegral schreiben kann:

$$K(q_i, q_f, t) = \int_{q(t)=q_f, q(0)=q_i} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(q,\dot{q}) dt'}.$$

Hinweis: Hier werden Sie zum ersten Mal mit der üblichen Unsitte konfrontiert, dass man unliebsame Faktoren im Pfadintegralmaß absorbiert.

[1] Wenn Ihnen dabei Angst und Bange wird: Schlechter definiert als das Pfadintegral selbst ist dieses Vor-

d) Der Propagator lautet in semiklassischer Näherung

$$K(q_i, q_f; t) \simeq e^{\frac{i}{\hbar}S[q_{cl}]} \int_{r(0)=r(t)=0} \mathcal{D}r \ \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \int_0^t dt' \int dt'' \ r(t') \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t') \delta q(t'')} \bigg|_{q=q_{cl}} r(t'') \right).$$

Zeigen Sie

$$\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int dt'' \ r(t') \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t') \delta q(t'')} \bigg|_{q=q_{cl}} r(t'') = -\frac{1}{2} \int dt \ r(t) \left(m\partial_t^2 + (\partial_q^2 V(q))\big|_{q=q_{cl}} \right) r(t).$$

Die gesuchte Rückkehrwahrscheinlichkeit ist $K(0,0;t)$. Die passende klassische Bewegungsgleichung ist durch $m\ddot{q} = -V'(q)$ mit den Randbedingungen $q(0) = q(t) = 0$ gegeben. Eine offensichtliche Lösung zu diesen Bewegungsgleichungen ist $q_{cl}(t) = 0$. Man kann zeigen[2], dass deren Betrachtung ausreicht.

e) Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme mit $m\omega^2 := V''(0)$ gilt

$$K(0,0;t) \simeq \int_{r(0)=r(t)=0} \mathcal{D}r \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \ r(t') \frac{m}{2} (\partial_{t'}^2 + \omega^2) r(t') \right).$$

f) Zeigen Sie durch Ausführen des Gaußintegrals

$$K(0,0;t) \simeq J \det\left(-\frac{m}{2}(\partial_t^2 + \omega^2) \right)^{-1/2},$$

wobei J eine Konstante ist.

g) Die Fluktuationsdeterminante ist definiert als das Produkt der Eigenwerte des Differentialoperators $-\frac{m}{2}(\partial_t^2 + \omega^2)$ auf dem Raum der zweifach stetig differenzierbaren Funktionen mit Randbedingungen $r(0) = r(t) = 0$. Zeigen Sie

$$\det\left(-\frac{m}{2}(\partial_t^2 + \omega^2) \right)^{-1/2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m}{2} \left(\left(\frac{n\pi}{t} \right)^2 - \omega^2 \right) \right]^{-1/2}.$$

Zunächst macht es den Anschein, dass wir mit unserer Rechnung gescheitert sind, denn wir können weder das unendliche Produkt sinnvoll berechnen noch die Konstante J angeben. Folgender Trick hilft allerdings: $K(0,0;t) = \frac{K(0,0;t)}{K_{frei}(0,0;t)} K_{frei}(0,0;t)$. Der freie Propagator ist aus der Vorlesung explizit bekannt als

$$K_{frei}(q_i, q_f; t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{\frac{mi}{2\hbar t}(q_f - q_i)^2} \Theta(t).$$

h) Überlegen Sie sich, wie wir mit unserer Rechnung in e)-g) den freien Propagator erhalten können.

i) Verwenden Sie dieses Wissen zusammen mit der Produktformel $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - (x/n\pi)^2 \right]^{-1} = x/\sin x$, um die gesuchte Rückkehrwahrscheinlichkeit zu berechnen. Woher kennen Sie dieses Ergebnis und warum verwundert es Sie nicht?

---

gehen nicht. Sie können stets diskretisieren, die endlichdimensionale Formel anwenden und dann den formalen Kontinuumslimes nehmen.

[2] Lesen Sie bei Interesse Kapitel 3.3 in *Condensed Matter Field Theory* von Altland & Simons. Eine ältere Version ist auch in der Skriptensammlung des Instituts verfügbar.